Représentation matérielle et représentation spatiale

Exercice 1 :

Jeanne et Pierre doivent aller sur l'Aar à Thoune pour fournir des mesures de température et de vitesse d'écoulement. Jeanne installe un thermomètre et un courantomètre fixés au fond de la rivière. Pierre, lui, monte sur une bouée qui dérive avec le courant, équipée d'un thermomètre et d'un GPS.

1. Qui des deux a choisi une description spatiale et qui a choisi une description matérielle ?
2. À quel moment les deux descriptions sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 : ***Cisaillement simple d'un cube***

En considérant le mouvement

$$\underline{x} = \underline{X} + kt(X_1\underline{e}_2 + X_2\underline{e}_1)$$

où $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ est le vecteur de position au temps t d'une particule qui était à la position $\underline{X} = X_1\underline{e}_1 + X_2\underline{e}_2 + X_3\underline{e}_3$ au temps $t = 0$. Dessiner la configuration d'un corps au temps t qui au temps $t = 0$ a une forme cubique avec des cotés unitaires.

Exercice 3 : ***Vitesse spatiale***

En considérant le mouvement

$$x_1 = \frac{1+t}{1+t_0}X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

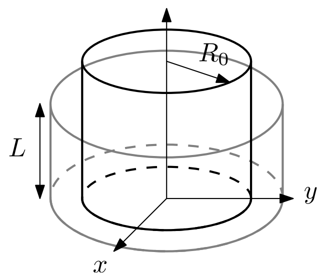
1. Montrer que le temps de référence est $t = t_o$
2. Trouver le champ de vitesse spatiale $\underline{v}(\underline{x})$ à partir du champ de vitesse matériel $\underline{v}(\underline{X})$ et des composantes du mouvement inverse.
3. Montrer que ce champ $\underline{v}(\underline{x})$ est égal au champ de vitesse spatiale du mouvement suivant

$$x_1 = (1+t)X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

Exercice 4 : ***Compression isovolumique***

Un cylindre est comprimé dans le sens de son axe.

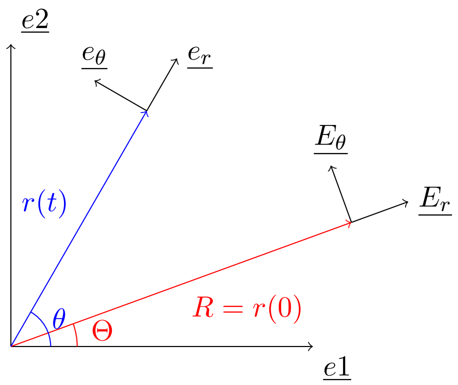
Déterminer le mouvement $\underline{x}(\underline{X})$ sachant que le matériau du cylindre est incompressible (i.e., le volume reste constant au cours de la déformation).



Exercice 5 : ***Représentation lagrangienne et eulérienne de la vitesse***

Les tourbillons étirés sont des structures très fréquentes dans les écoulements industriels. En considérant le mouvement d'un tourbillon en deux dimensions, on peut observer que la vitesse de rotation angulaire ω d'une particule par rapport au centre O du tourbillon est constante. De plus, sa distance du centre du tourbillon suit une loi $r(t) = \lambda(t)R$, avec $r(0) = R$. On utilisera les coordonnées polaires (r, θ) pour la position actuelle $\underline{X}$, et (R, Θ) pour la position initiale $\underline{X}$. Les vecteurs unitaires dans la position actuelle $\underline{x} = r(t)\underline{e_r}$ et dans la position de référence $\underline{X} = R\underline{E_r}$, sont liés par :

$$\underline{e_r} = \cos\theta \underline{e_1} + \sin\theta \underline{e_2}$$
$$\underline{e_\theta} = -\sin\theta \underline{e_1} + \cos\theta \underline{e_2}$$



1. Déterminer en coordonnées polaires les trajectoires $r(\theta)$ associées à ce mouvement.
2. Considérer la fonction $\lambda(t) = \frac{1}{1+t/3}$. Tracer dans Python la trajectoire d'une particule, considérer $\theta \in [0, 2\pi]$ et $R = 1$.
3. Calculer le champ de vitesse en description eulérienne et lagrangienne. Pour quelle fonction $\lambda(t)$ le mouvement est-il stationnaire (ne dépend pas du temps) ?

Exercice 6 : ***Insecte marchant sur un fil extensible (En cours Jeudi 02 avec Prof. Molinari)***

Un insecte marche sur un fil extensible à une vitesse V par rapport au point matériel du fil sur lequel il se trouve. L'insecte commence à l'extrémité fixée à $t = 0$. L'extrémité libre du fil se déplace à la vitesse V_0. La longueur initiale du fil est L. La relation entre la configuration spatiale et la configuration de référence pour le fil extensible est donnée par :

$$x(X,t) = X\left(1 + \frac{v_0}{L}t\right) , \tag{1}$$

1. écrivez la vitesse matérielle d'un point du fil
2. écrivez l'équation du mouvement pour l'insecte, avec la coordonnée spatiale $x_b(t)$
3. étant donnée la solution $x_b(t) = \frac{V}{V_0}(L+V_0 t)\ln\left(\frac{L+V_0 t}{L}\right))$, trouvez le temps nécessaire pour que l'insecte atteigne l'extrémité libre du fil