Représentation matérielle et représentation spatiale : correction

Exercice 1 :

Jeanne et Pierre doivent aller sur l'Aar à Thoune pour fournir des mesures de température et de vitesse d'écoulement. Jeanne installe un thermomètre et un courantomètre fixés au fond de la rivière. Pierre, lui, monte sur une bouée qui dérive avec le courant, équipée d'un thermomètre et d'un GPS.

1. Qui des deux a choisi une description spatiale et qui a choisi une description matérielle ?
2. À quel moment les deux descriptions sont-elles équivalentes ?

Solution :

1. Jeanne a choisi d'observer un point précis de l'espace (là où elle a planté son thermomètre), ses mesures reflètent donc une description spatiale (ou Eulerienne). Pierre ayant choisi de se laisser porter par le courant, on peut considérer qu'il suit une goutte d'eau et que sa description du problème est donc matérielle (ou Lagrangienne).
2. Les mesures seront égales au moment où Pierre sera au niveau de Jeanne. En effet, s'ils mesurent le même point au même moment, la vitesse et la température mesurée seront égales.

Exercice 2 : ***Cisaillement simple d'un cube***

En considérant le mouvement

$$\underline{x} = \underline{X} + kt(X_1\underline{e}_2 + X_2\underline{e}_1)$$

où $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ est le vecteur de position au temps t d'une particule qui était à la position $\underline{X} = X_1\underline{e}_1 + X_2\underline{e}_2 + X_3\underline{e}_3$ au temps $t = 0$. Dessiner la configuration d'un corps au temps t qui au temps $t = 0$ a une forme cubique avec des cotés unitaires.

Solution :

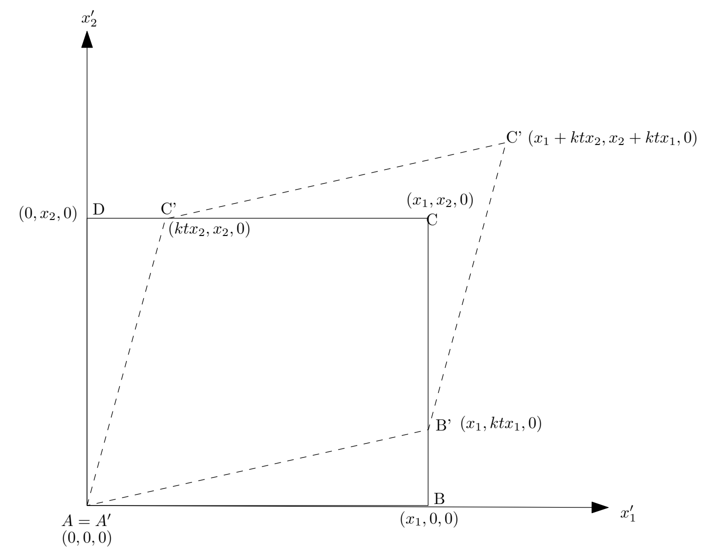


FIGURE 1 – Cisaillement simple d'un cube.

Pour dessiner la configuration d'un cube unitaire sujet au mouvement

$$\underline{x} = \underline{X} + kt(X_1\underline{e}_2 + X_2\underline{e}_1)$$

tout d'abord on remarque que le corps ne se déplace pas dans la troisième direction lorsque le temps évolue et donc il suffit de dessiner le mouvement dans les deux directions x_1 et x_2. Au debut, au temps $t = 0$ les coordonnées sont :

$$\underline{x} = \underline{X} \quad \Rightarrow \quad x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3$$

En dessinant les coordonnées des points A, B, C, et D on obtient le cube unitaire representé par le cube déformé dans la figure 1. Dans un temps quelconque t les coordonnées deviennent :

$$\underline{x} = \underline{X} + kt(X_1\underline{e}_2 + X_2\underline{e}_1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = X_1 + ktX_2 \quad x_2 = X_2 + ktX_1 \quad x_3 = X_3$$

et les points A, B, C, et D se déplacent en A', B', C' et D' et la nouvelle configuration du corps est representée par les lignes pointillées dans la figure 1.

Exercice 3 : ***Vitesse spatiale***

En considérant le mouvement

$$x_1 = \frac{1+t}{1+t_0}X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

1. Montrer que le temps de référence est $t = t_0$
2. Trouver le champ de vitesse spatiale $\underline{v}(\underline{x})$ à partir du champ de vitesse matériel $\underline{v}(\underline{X})$ et des composantes du mouvement inverse.
3. Montrer que ce champ $\underline{v}(\underline{x})$ est égal au champ de vitesse spatiale du mouvement suivant

$$x_1 = (1+t)X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

Solution :

1. Au temps de référence on a $\underline{x}(t_{\text{ref}}) = \underline{X}$. Ceci est trivialement satisfait pour les composantes 2 et 3. Pour x_1 :

$$x_1(t_{\text{ref}}) = \frac{1+t_{\text{ref}}}{1+t_0}X_1 = X_1 \Rightarrow t_{\text{ref}} = t_0.$$

2. La vitesse materielle est donnée par

$$\underline{v}(\underline{X}) = \underline{v}(X_1) = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{1}{1+t_0}X_1\underline{e}_1, \qquad (1)$$

et la première composante du mouvement inverse est

$$X_1(\underline{x}) = X_1(x_1) = \frac{1+t_0}{1+t}x_1. \qquad (2)$$

On trouve la vitesse spatiale en composant les deux fonctions (1 et 2).

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(X_1') = \frac{x_1}{1+t}\underline{e}_1$$

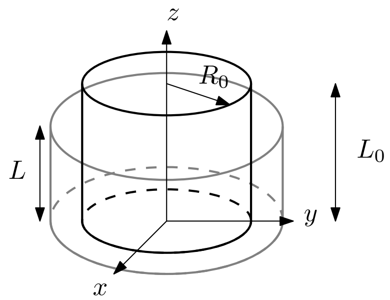
3. De manière analogue à la solution précédente, on trouve que

$$\underline{v}_1(\underline{X}) = X_1\underline{e}_1, \quad \text{or} \quad X_1 = \frac{1}{1+t}x_1,$$
$$\Rightarrow \underline{v}_1(\underline{x}) = \underline{v}_1(x_1) = \frac{x_1}{1+t}\underline{e}_1 = \underline{v}(\underline{x}).$$

Exercice 4 : ***Compression isovolumique***

Un cylindre est comprimé dans le sens de son axe.

Déterminer le mouvement $\underline{x}(\underline{X})$ sachant que le matériau du cylindre est incompressible (i.e., le volume reste constant au cours de la déformation).



Solution :

On assume que la déformée du cylindre reste cylindrique. En posant $\frac{L}{L_0} = \lambda$, on obtient

$$z(X, Y, Z) = z(Z) = \lambda Z.$$

En exploitant la symétrie cylindrique $(r(R) = x(X) = y(Y))$ on pose

$$x = \alpha X \text{ et } y = \alpha Y$$

Si le mouvement est isovolumique, le volume de chaque element infinitésimal dV reste constant

$$\begin{aligned} dV &= d\nu, \\ dXdYdZ &= dxdydz, \\ dXdYdZ &= \alpha dX \alpha dY \lambda dZ, \\ 1 &= \alpha^2 \lambda \Rightarrow \alpha = \lambda^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

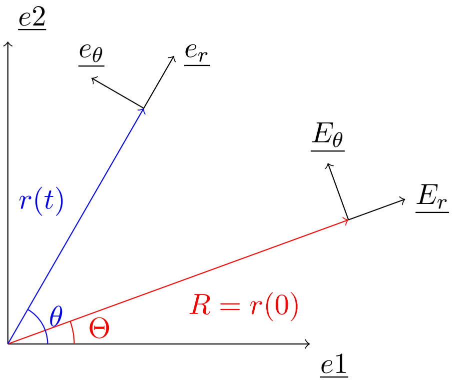
Nous trouvons donc le mouvement

$$\underline{x}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \lambda^{-\frac{1}{2}} X \\ \lambda^{-\frac{1}{2}} Y \\ \lambda Z \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : ***Représentation lagrangienne et eulérienne de la vitesse***

Les tourbillons étirés sont des structures très fréquentes dans les écoulements industriels. En considérant le mouvement d'un tourbillon en deux dimensions, on peut observer que la vitesse de rotation angulaire ω d'une particule par rapport au centre O du tourbillon est constante. De plus, sa distance du centre du tourbillon suit une loi $r(t) = \lambda(t)R$, avec $r(0) = R$. On utilisera les coordonnées polaires (r, θ) pour la position actuelle $\underline{x}$, et (R, Θ) pour la position initiale $\underline{X}$. Les vecteurs unitaires dans la position actuelle $\underline{x} = r(t)\underline{e_r}$ et dans la position de référence $\underline{X} = R\underline{E_r}$, sont liés par :

$$\begin{aligned} \underline{e_r} &= \cos\theta \underline{e_1} + \sin\theta \underline{e_2} \\ \underline{e_\theta} &= -\sin\theta \underline{e_1} + \cos\theta \underline{e_2} \end{aligned}$$



1. Déterminer en coordonnées polaires, les trajectoires $r(\theta)$ associées à ce mouvement.
2. Considérer la fonction $\lambda(t) = \frac{1}{1+t/3}$. Tracer dans Python la trajectoire d'une particule, considérer $\theta \in [0, 2\pi]$ et $R = 1$.
3. Calculer le champ de vitesse en description eulérienne et lagrangienne. Pour quelle fonction $\lambda(t)$ le mouvement est-il stationnaire (ne dépend pas du temps) ?

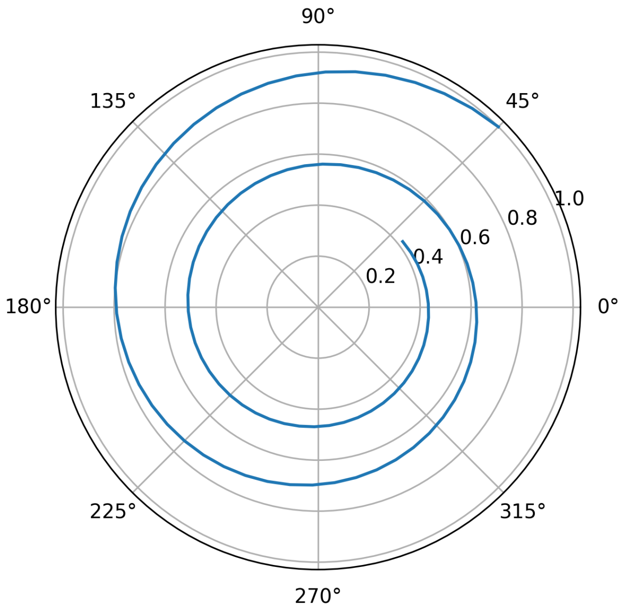
Solution :

1. Le mouvement se décompose en une extension radiale définie par $r(t) = \lambda(t)R$ et une rotation d'angle (θ). La vitesse de rotation angulaire constante donne une position angulaire affine en fonction du temps $\theta(t) = \omega t + \Theta$. En éliminant le temps, $t = \frac{\theta - \Theta}{\omega}$ on obtient des trajectoires spirales $r(\theta) = \lambda((\theta - \Theta)/\omega)R$.
2.
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 100
theta0 = np.pi / 4
theta_max = 4 * np.pi
omega = 3
R = 1
dtheta = theta_max / n
theta = np.arange(theta0, theta0 + theta_max, dtheta)
t = (theta - theta0) / omega
lambd = np.zeros(n)
r = np.zeros(n)

for i in range(n):
    lambd[i] = 1 / (1 + t[i] / 3)
    r[i] = lambd[i] * R

plt.polar(theta, r)
plt.show()
```



3. On commence par la vitesse lagrangienne (matérielle), puis on en déduit l'eulérienne (spatiale).

   Position d'une particule étiquetée (R, Θ) :

$$r(t) = \lambda(t)R, \qquad \theta(t) = \omega t + \Theta, \qquad \underline{x}(t) = r(t)\,\underline{e_r}(\theta(t)),$$

   On note qu'en coordonnée polaire, $\underline{\dot{e_r}} = \dot{\theta}\,\underline{e_\theta}$ et $\underline{\dot{e_\theta}} = -\dot{\theta}\,\underline{e_r}$.

   À (R, Θ) fixés,

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d}{dt}[r\,\underline{e_r}] = \dot{r}\,\underline{e_r} + r\,\underline{\dot{e_r}} = \dot{r}\,\underline{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\underline{e_\theta} = \dot{\lambda}\,R\,\underline{e_r} + r\,\omega\,\underline{e_\theta}. \tag{1}$$

   La vitesse lagrangienne est

$$\begin{aligned}\underline{v}(R, \Theta, t) &= \dot{\lambda}\,R\,\underline{e_r} + \lambda R\,\omega\,\underline{e_\theta} \\ &= (\dot{\lambda}R\cos\theta - \lambda R\omega\sin\theta)\underline{e_1} + (\dot{\lambda}R\sin\theta + \lambda R\omega\cos\theta)\underline{e_2}\end{aligned}$$

   avec $\theta(t) = \Theta + \omega t$. On est passé en coordonnées cartésiennes pour supprimer la dépendance des axes à θ. Pour la description eulérienne, on remplace $R = r/\lambda(t)$ dans l'Equation 1 :

$$\underline{v}(r, \theta, t) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\,r\,\underline{e_r} + \omega\,r\,\underline{e_\theta}\,.$$

   Le mouvement est dit stationnaire ou permanent lorsque la vitesse eulérienne ne dépend pas du temps, $\underline{v}(r, \theta, t) = \underline{v}(r, \theta)$. Dans le cas présent : $\dot{\lambda}/\lambda = \text{const} = \alpha$, donc

$$\lambda(t) = \lambda_0\,e^{\alpha t}\,.$$

Exercice 6 : *Insecte marchant sur un fil extensible (difficile)*

Un insecte marche sur un fil extensible à une vitesse V par rapport au point matériel du fil sur lequel il se trouve. L'insecte commence à l'extrémité fixée à $t = 0$. L'extrémité libre du fil se déplace à la vitesse V_0. La longueur initiale du fil est L. La relation entre la configuration spatiale et la configuration de référence pour le fil extensible est donnée par :

$$x(X, t) = X\left(1 + \frac{V_0}{L}t\right)\,, \tag{2}$$

1. écrivez la vitesse matérielle d'un point du fil
2. écrivez l'équation du mouvement pour l'insecte, avec la coordonnée spatiale $x_b(t)$
3. étant donnée la solution $x_b(t) = \frac{V}{V_0}(L+V_0t)\ln\left(\frac{L+V_0t}{L}\right)$), trouvez le temps nécessaire pour que l'insecte atteigne l'extrémité libre du fil

Solution :

1. La vitesse matérielle d'un point du fil est :

$$v(X,t) = \frac{dx}{dt} = \frac{X}{L}V_0\,. \tag{3}$$

2. En substituant $X = X(x,t)$ de l'équation 2 dans l'équation 3, nous obtenons la vitesse spatiale du fil :

$$v(x,t) = \frac{x}{L+V_0t}V_0\,. \tag{4}$$

Comme l'insecte se déplace à une vitesse constante V par rapport au point du fil sur lequel il marche, en appelant $x_b(t)$ et $v_b(t)$ respectivement la position et la vitesse spatiale de l'insecte, l'équation du mouvement est :

$$v_b(t) \equiv \frac{dx_b(t)}{dt} = \frac{x_b}{L+V_0t}V_0 + V\,.$$

3. La solution à l'équation différentielle du premier ordre est :

$$x_b(t) = \frac{V}{V_0}(L+V_0t)\ln\left(\frac{L+V_0t}{L}\right).$$

L'insecte atteint l'extrémité du fil dans le référentiel spatial lorsque $x_b(t^*) = L' = L + V_0t$.
Cela donne, $t^* = (L/V_0)(\exp(V_0/V) - 1)$.

De plus, nous pouvons également calculer la distance de l'insecte par rapport à l'extrémité opposée du fil :

$$L' - x_b(t) = (L+V_0t)\left[1 - \frac{V}{V_0}\ln\left(1+\frac{V_0}{L}t\right)\right]. \tag{5}$$

Une représentation graphique est donnée à la figure 2.

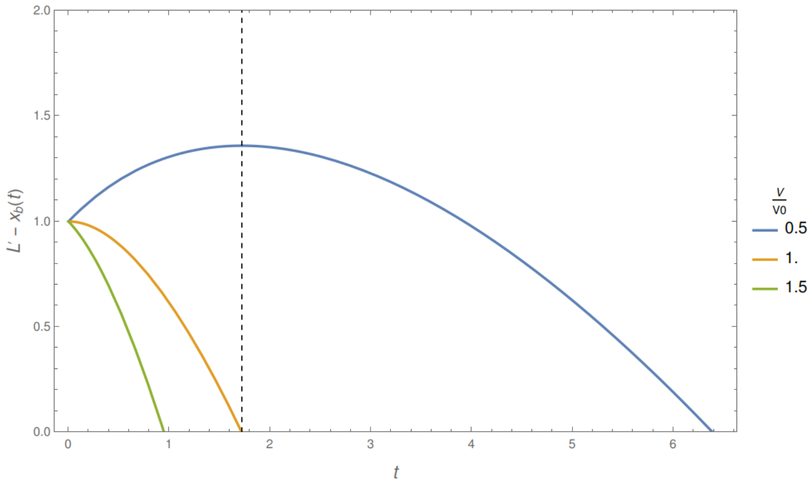


FIGURE 2 – Graphique de l'équation 5 pour $L = 1$, $V_0 = 1$, et différentes valeurs de V. Si la vitesse de l'insecte est supérieure à celle de l'extrémité libre ($V > V_0$), l'insecte verra toujours la distance jusqu'à l'extrémité diminuer. Au contraire, si ($V < V_0$), l'insecte perd initialement du terrain, mais progresse toujours. L'instant où l'insecte est le plus éloigné de l'extrémité correspond à la ligne en pointillés (point de dépression). *Est-ce la métaphore de la vie ?*