

*Préliminaires mathématiques 3*

En vous aidant de tout document, répondez précisément aux questions suivantes :

1. Qu'est-ce qu'un système de coordonnées cartésiennes ?
2. Qu'est-ce qu'un système de coordonnées cylindriques ?
3. Qu'est-ce qu'un système de coordonnées sphériques ?
4. Quelles sont les expressions du gradient d'un champ scalaire en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques ?
5. Quelles sont les expressions du gradient d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques ?
6. Quelles sont les expressions de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes et cylindriques ?

**Exercice 1 :**

Calculer  $\nabla(\underline{u})$  en coordonnées cylindriques pour le champ de déplacement suivant :

$$u_r = A/r^2 \text{ et } u_\theta = Br \text{ et } u_z = 0 \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constants.}$$

**Exercice 2 :**

Calculer  $\nabla(\underline{u})$  en coordonnées sphériques pour le champ de déplacement suivant :

$$u_r = A/r^2 + Br \text{ et } u_\theta = 0 \text{ et } u_\phi = 0 \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constants.}$$

**Exercice 3 :**

Calculer  $\text{div } \mathbf{T}$  en coordonnées sphériques pour le champ tensoriel suivant :

$$T_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, T_{r\theta} = T_{\theta r} = T_{\theta\phi} = T_{\phi\theta} = T_{r\phi} = T_{\phi r} = 0.$$

**Exercice 4 :**

On considère une source de chaleur qui produit un champ de température  $\theta$  défini par  $\theta = 2(x^2 + y^2)$

1. Sachant que la loi de Fourier s'écrit  $\underline{q} = -k\nabla(\theta)$ , calculer  $\underline{q}$ . Notez que  $\underline{q}$  est un vecteur appelé flux de chaleur, et que  $k$  est un scalaire positif appelé conductivité thermique.
2. Calculer la température au point A de coordonnées  $(1, 0)$  et au point B de coordonnées  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .
3. Dessiner deux isothermes de votre choix ainsi que le flux de chaleur aux points A et B.

**Exercice 5 :**

La forme la plus générale de la loi de Fourier est  $\underline{q} = -\mathbf{K}\nabla(\theta)$  avec  $\underline{q}$  le vecteur flux de chaleur, et  $\mathbf{K}$  la matrice de conductivité thermique (par rapport à l'exercice précédent, cela signifie que la température n'est pas nécessairement conduite de la même manière dans toutes les directions de l'espace et ne suit pas nécessairement le gradient de température).

1. Ecrire la matrice  $\mathbf{K}$  si le milieu est isotrope, i.e. si la loi de Fourier s'écrit comme dans l'exercice 4.
2. Montrer que dans le cas général, le flux de chaleur ne suit pas obligatoirement le gradient de température.

3. Si on suppose que  $\mathbf{K}$  est une matrice symétrique réelle, pour quelles directions de  $\nabla(\theta)$  avons nous le flux de chaleur normal à des surfaces d'iso-température (colinéaire au gradient).
4. On considère une source de chaleur qui produit un champ de température  $\theta$  défini par  $\theta = 2x + 2y$ , et un milieu tel que  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Trouver le flux de chaleur.

### Exercice 6 :

Le moment d'inertie d'un objet par rapport à un axe quantifie la résistance d'un corps soumis à une mise en rotation (ou plus généralement à une accélération angulaire) par rapport à cet axe (c.f. wikipedia). Il s'exprime simplement (par rapport à un axe de direction  $\underline{n}$ ) :

$$I_n = \int \|\underline{r}\|^2 dm = \iiint \rho \|\underline{r}\|^2 dx dy dz$$

où  $\underline{r}$  est le vecteur position et  $\rho$  la masse volumique.

Pour le même objet, différents axes de rotation donneront des moments d'inertie différents. En général les moments d'inertie ne sont pas égaux sauf si l'objet est symétrique par rapport à tous les axes. Le **tenseur des moments d'inertie** est une manière pratique d'exprimer tous les moments d'inertie d'un objet. Il peut être calculé par rapport à n'importe quel point de l'espace.

On l'écrit au point  $O$  :

$$\mathbf{I}_O = \iiint \rho (\|\underline{r}\|^2 \mathbf{I} - \underline{r} \otimes \underline{r}) dx dy dz$$

On peut retrouver l'expression du moment d'inertie par rapport à l'axe de direction  $\underline{n}$  par :

$$I_n = \underline{n} \cdot \mathbf{I}_O \underline{n}$$

où  $\underline{n}$  est un vecteur unitaire.

1. Montrer que  $\mathbf{I}_O$  est symétrique.
2. Soit  $\underline{r} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3$ , exprimer, sans les calculer, toutes les composantes du tenseur d'inertie  $\mathbf{I}_O$ .
3. Les termes diagonaux du tenseur  $\mathbf{I}_O$  sont les moments d'inertie et les termes hors-diagonaux les produits d'inertie. Pour quels axes (sans les calculer) les produits d'inertie sont-ils nuls? Pour quels axes les moments d'inertie seront-ils maximum (ou minimum)?
4. Calculer le tenseur des moments d'inertie d'un parallélépipède rectangle de dimensions  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  autour de son centre de masse. L'exprimer en fonction de la masse totale  $M$ .