Préliminaires mathématiques (2)

Exercice 1 :

1. $\boldsymbol{R}$ correspond à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe $\underline{x}_3$ (passant par l'origine). Donner l'expression de la matrice $\boldsymbol{R}$.
2. $\boldsymbol{S}$ correspond à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe $\underline{x}_1$ (passant par l'origine). Donner l'expression de la matrice $\boldsymbol{S}$.
3. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (1) puis à la question (2).
4. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (2) puis à la question (1).
5. On considère un point P dont les coordonnées sont $(1, 1, 0)$. Déterminer la nouvelle position de ce point après les rotations effectuées à la question (3). Déterminer la nouvelle position de ce point après les rotations effectuées à la question (4).
6. Comment pourriez-vous déterminer l'axe et l'angle de rotation définies à la question (3) et (4).

Exercice 2 :

Soit $\boldsymbol{R}$ la matrice de rotation d'angle θ (sens trigonométrique) et d'axe de rotation $\underline{x}_3$.

1. Exprimer $\boldsymbol{R}^2$
2. Montrer que $\boldsymbol{R}^2$ correspond à une rotation d'angle 2θ autour du même axe.
3. Exprimer $\boldsymbol{R}^n$ pour tout entier n.

Exercice 3 :

Le tenseur $\boldsymbol{T}$ s'écrit dans la base $\underline{e_i}$:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exprimer T'_{11}, T'_{12} etT'_{31} dans la base orthonormée $\underline{e'_i}$ où $\underline{e'_1}$ a la direction de $-\underline{e_2}+2\underline{e_3}$ et $\underline{e'_2}$ la direction de $\underline{e_1}$.

Exercice 4 :

Soit $\boldsymbol{T}$ le tenseur suivant :

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie symétrique et antisymétrique de $\boldsymbol{T}$.
2. Déterminer le vecteur dual $\underline{t}^A$ de la partie anti-symétrique $\boldsymbol{T}^A$ de $\boldsymbol{T}$ (aussi appelé vecteur axial), défini tel que :

   $$\boldsymbol{T}^A \underline{a} = \underline{t}^A \times \underline{a} \quad \forall \underline{a}$$

   Indication : exprimer les composantes de $\underline{t}^A$ à partir des composantes de $\boldsymbol{T}^A$ en partant de $T^A_{12} = \underline{e}_1 \cdot \boldsymbol{T}^A \underline{e}_2$. Rappel (permutation du produit mixte) : $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$

Exercice 5 :

Soit $\boldsymbol{T}$ le tenseur suivant :

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les trois invariants, les valeurs propres et les vecteurs propres de $\boldsymbol{T}$.
2. Si $\underline{n_1}$,$\underline{n_2}$ et $\underline{n_3}$ sont les vecteurs propres, écrire $[\boldsymbol{T}]_{\underline{n_i}}$.
3. Est-ce que la matrice suivante représente le tenseur $\boldsymbol{T}$ par rapport à une base de référence arbitraire ?

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$