Corrections : Préliminaires mathématiques (suite et fin)

Exercice 1 :

les matrices de rotation en 3D s'écrivent :

$$\boldsymbol{R}_{x_1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_{x_2}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_{x_3}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. $\boldsymbol{R}$ correspondant à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe x_3 :

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $\boldsymbol{S}$ correspondant à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe x_1 :

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (1) puis à la question (2) :

$$\boldsymbol{SR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (2) puis à la question (1) :

$$\boldsymbol{RS} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. On prendra r comme étant le vecteur position du point P, d'où $r = OP = (1, 1, 0)$ avec le point O comme centre du repère (x_1, x_2, x_3), $r^\star$ et $r^{\star\star}$ seront respectivement les vecteurs positions du point P après que celui-ci est subit les rotations décrites à la question (3) et à la question (4).

$$\underline{r}^\star = \boldsymbol{SR}\underline{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^{\star\star} = \boldsymbol{RS}\underline{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Pour déterminer l'axe de rotation V définies par la matrice de rotation $\boldsymbol{SR}$ (voir question 3), on calcule les trois valeurs propres puis le vecteur propre qui sera l'axe de rotation V.

   Les valeurs propres sont calculées à partir du déterminant de la matrice $(\boldsymbol{SR} - \lambda \boldsymbol{I})$. On obtient ainsi la valeur propre réelle $\lambda_1 = 1$. λ_2 et λ_3 sont des valeurs complexes.

Le vecteur propre $\underline{V}_1$ est calculé à partir de l'équation suivante :

$$\boldsymbol{SR}\ \underline{V}_1 = \lambda_1\ \underline{V}_1$$

Et on trouve ainsi le vecteur unitaire $\underline{V} = \underline{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pour calculer l'angle de rotation ψ (voir figure 1), on déterminera à l'aide d'un produit vectoriel un vecteur unitaire $\underline{U}$ perpendiculaire au vecteur $\underline{V}$. En sachant que le vecteur $\underline{U}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\underline{V}$ parmi une infinité de vecteurs unitaires. Puis on déterminera un vecteur unitaire $\underline{U}' = \boldsymbol{SR}\ \underline{U}$ qui est la transformation du vecteur unitaire $\underline{U}$ par la matrice de rotation $\boldsymbol{SR}$.

Donc : $\underline{U}_1 = \underline{V} \times \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

et le vecteur normalisé $\underline{U}$ est donné par $\underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}_1$. Ensuite le vecteur $\underline{U}'_1$ peut être calculé

$\underline{U}'_1 = \boldsymbol{SR}\ \underline{U} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

et après normalisation on obtient le vecteur unitaire $\underline{U}'$: $\underline{U}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}'_1$

Finalement si on fait le produit scalaire : $\underline{U} \cdot \underline{U}' = || \underline{U} ||\ || \underline{U}' ||\ cos(\psi)$ on trouve $\psi = \frac{2\pi}{3}$.

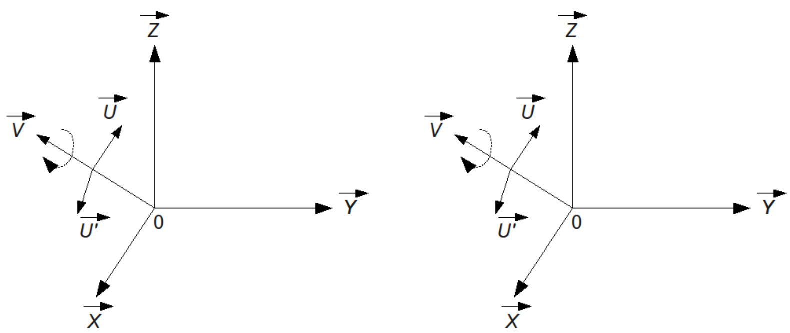

FIGURE 1 – Schéma descriptif

Exercice 2 :

Soit $\boldsymbol{R}$ la matrice de rotation d'angle θ (sens trigonométrique) et d'axe de rotation x_3.

1. Exprimer $\boldsymbol{R}^2$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Montrer que $\boldsymbol{R}^2$ correspond à une rotation d'angle 2θ autour du même axe.

   Sachant que : $\cos a \ \cos b - \sin a \ \sin b = \cos(a+b)$ et $\sin a \ \cos b + \sin b \ \cos a = \sin(a+b)$ on peut écrire $\boldsymbol{R}^2$

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Cette matrice représente la rotation d'angle 2θ autour de l'axe $\underline{x_3}$.

3. Exprimer $\boldsymbol{R}^n$ pour tout entier n.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^{n-1} &= \begin{bmatrix} \cos((n-1)\theta) & -\sin((n-1)\theta) & 0 \\ \sin((n-1)\theta) & \cos((n-1)\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{R}^{n-1}\boldsymbol{R} &= \begin{bmatrix} \cos((n-1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n-1)\theta)\sin(\theta) & -\cos((n-1)\theta)\sin(\theta) - \sin((n-1)\theta)\cos(\theta) & 0 \\ \sin((n-1)\theta)\cos(\theta) + \cos((n-1)\theta)\sin(\theta) & -\sin((n-1)\theta)\sin(\theta) + \cos((n-1)\theta)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) & 0 \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   par récurrence, on obtient donc $\boldsymbol{R}^n$ qui est la matrice de rotation d'angle $n\theta$

Exercice 3 :

Le tenseur $\boldsymbol{T}$ s'écrit dans la base $\underline{e_i}$:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exprimer T'_{11}, T'_{12} et T'_{31} dans la base orthonormée $\underline{e'_i}$ où $\underline{e'_1}$ a la direction de $-\underline{e_2}+2\underline{e_3}$ et $\underline{e'_2}$ la direction de $\underline{e_1}$.

Le tenseur $\boldsymbol{T}$ doit être exprimé dans une base $\boldsymbol{e'_i}$ qui est une transformation des axes des bases $\boldsymbol{e_i}$. Les vecteurs de la base $\underline{e'_i}$ doivent être normés.

$$\begin{aligned} \mathbf{e'_1} &= \frac{1}{\|-\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}\|}(-\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e'_2} &= \frac{1}{\|\mathbf{e_1}\|}\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour un système orthonormé direct $\underline{e'_3}$ est défini par

$$\underline{e'_3} = \underline{e'_1} \times \underline{e'_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour exprimer T'_{ij} (changement de base), on peut utiliser la règle de transformation :

$$T'_{ij} = Q_{ri}Q_{sj}T_{rs}$$

où $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{Q}$ avec

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1}^t \\ \mathbf{e_2}^t \\ \mathbf{e_3}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e_1'} & \mathbf{e_2'} & \mathbf{e_3'} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T'} = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -15\sqrt{5} & 2 \\ -15\sqrt{5} & 5 & 5\sqrt{5} \\ 2 & 5\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $T'_{11} = \frac{4}{5}$, $T'_{12} = -3\sqrt{5}$ et $T'_{31} = \frac{2}{5}$

Remarque : comme il est uniquement demandé de calculer 3 coefficients, il est possible de calculer directement $T'_{11} = \mathbf{e_1'}^t \; T \; \mathbf{e_1'}$, $T'_{12} = \mathbf{e_1'}^t \; T \; \mathbf{e_2'}$ et $T'_{31} = \mathbf{e_3'}^t \; T \; \mathbf{e_1'}$.

Exercice 4 :

Soit $\boldsymbol{T}$ le tenseur suivant :

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie symétrique et antisymétrique de $\boldsymbol{T}$.

   Le tenseur $\mathbf{T}$ est symértique si $\mathbf{T} = \mathbf{T}^t$, Le tenseur $\mathbf{T}$ est antisymétrique si $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^t$. Tout tenseur $\mathbf{T}$ peut être décomposé comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymérique

   $$\mathbf{T} = \mathbf{T^S} + \mathbf{T^A}$$

   avec $\mathbf{T^S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t)$ et $\mathbf{T^A} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t)$

   $$\mathbf{T^S} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

   $$\mathbf{T^A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer le vecteur dual $\underline{t}^A$ de la partie anti-symétrique $\boldsymbol{T}^A$ de $\boldsymbol{T}$ (aussi appelé vecteur axial), défini tel que :

   $$\boldsymbol{T}^A \underline{a} = \underline{t}^A \times \underline{a} \quad \forall \underline{a}$$

   Indication : exprimer les composantes de $\underline{t}^A$ à partir des composantes de $\boldsymbol{T}^A$ en partant de $T^A_{12} = \underline{e}_1 \cdot \boldsymbol{T}^A \underline{e}_2$. Rappel (permutation du produit mixte) : $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$

   $$T_{12} = \mathbf{e_1} \mathbf{T} \mathbf{e_2} = \mathbf{e_1} \mathbf{t^A} \times \mathbf{e_2} = \mathbf{t^A} \mathbf{e_2} \times \mathbf{e_1} = -\mathbf{t^A} \mathbf{e_3} = -t^A_3$$

   de même $T_{31} = -t^A_2$ et $T_{23} = -t^A_1$

   $$\mathbf{t^A} = -(T_{23}\mathbf{e_1} + T_{31}\mathbf{e_2} + T_{12}\mathbf{e_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 :

Soit $\boldsymbol{T}$ le tenseur suivant :

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les trois invariants, les valeurs propres et les vecteurs propres de $\boldsymbol{T}$. Les 3 invariants de $\boldsymbol{T}$ sont :

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\boldsymbol{T}) = 7 \\ I_2 &= \frac{1}{2}(tr(\boldsymbol{T})^2 - tr(\boldsymbol{T}^2)) = \frac{1}{2}(7^2 - (5^2 + 4^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2)) = -9 \\ I_3 &= det(\boldsymbol{T}) = -15 - 48 = -63 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont les racines de : $\det(T - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) - 16(3-\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda - 63 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

Ici puisque les valeurs propres et les invariants doivent être calculés, il est intéressant de calculer d'abord les valeurs propres puis d'utiliser les expressions des invariants en fonction des valeurs propres :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

Ces expressions sont obtenues à partir de la définition des invariants dans la base propre.

Les vecteurs propres sont :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}\underline{n_i} &= \lambda_i \underline{n_i} \\ (\boldsymbol{T} - \lambda I)\underline{n_i} &= 0 \end{aligned}$$

— pour $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2x_2, \quad x_1 = 2x_2, \quad x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

— pour $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2, \quad x_1 = x_2, \quad x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 = -x_2, \quad 2x_1 = -x_2, \quad x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n_3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Si $\underline{n_1}$,$\underline{n_2}$ et $\underline{n_3}$ sont les vecteurs propres, écrire $[\boldsymbol{T}]_{\underline{n_i}}$.

$$[\boldsymbol{T}]_{\underline{n_i}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Est-ce que la matrice suivante représente le tenseur $\boldsymbol{T}$ par rapport à une base de référence arbitraire ?

$$\boldsymbol{T'} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on vérifie que les invariants sont identiques (les matrices d'un même tenseur dans deux bases ont les mêmes invariants, et la réciproque est également vraie : deux matrices ayant les mêmes invariants représentent le même tenseur dans deux bases différentes)

$$\begin{aligned} I_1' &= tr(\boldsymbol{T'}) = 7 = I_1 \\ I_2' &= \frac{1}{2}(tr(\boldsymbol{T'})^2 - tr(\boldsymbol{T'}^2)) = \frac{1}{2}(7^2 - 59) = -5 \neq I_2 \\ I_3' &= det(\boldsymbol{T'}) = -3 \neq I_3 \end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{T'}$ n'est pas un représentation de la matrice $\boldsymbol{T}$ dans une autre base.