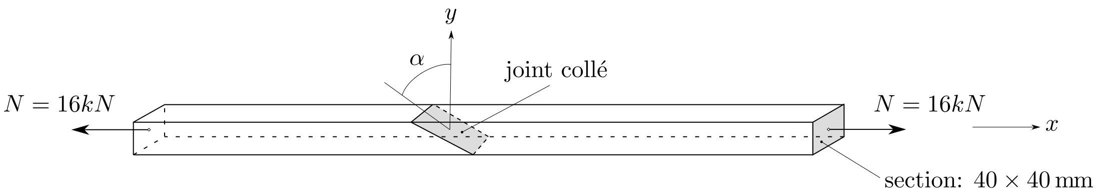
## *Exercices en classe - Correction*

**Exercice 1 :**

Un barreau de section carrée 40 mm × 40 mm est soumis à une force de traction $N = 16$ kN. Déterminer analytiquement l'orientation $\alpha$ à donner à un joint collé pour que la contrainte de traction n'y excède pas 2 N/mm$^2$ ; quelle est alors la contrainte tangentielle dans le joint ?




**Solution :**

Tout d'abord, on doit évaluer le tenseur des contraintes dans la base initiale liée à la barre :

$$\sigma_x = \frac{16000 \text{ N}}{40 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}} = \frac{16000 \text{ N}}{1600 \text{ mm}^2} = 10 \text{ N/mm}^2, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0$$

On remarque qu'on est déjà dans la base des contraintes principales, on a donc les contraintes principales égales à :

$$\sigma_1 = 10 \text{ N/mm}^2, \qquad \sigma_2 = 0$$

Pour trouver l'orientation $\alpha$ que l'on doit donner à un joint collé pour que la contrainte de traction n'excède pas 2 N/mm$^2$, on exprime le tenseur des contraintes dans une base d'orientation quelconque d'angle $\alpha$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{c}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos^2\alpha & -\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha \\ -\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha & \sigma_1 \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

par conséquent,

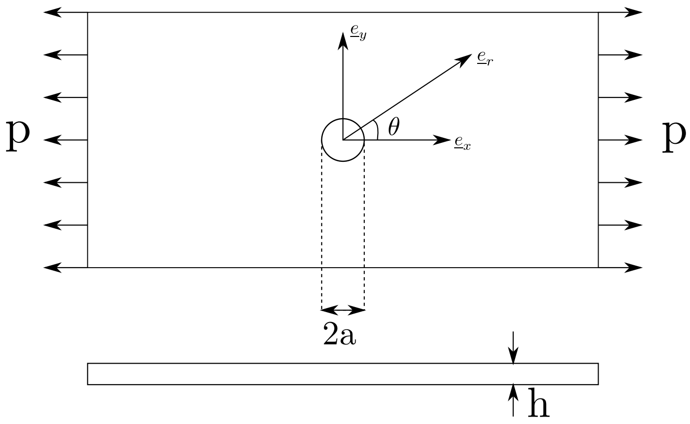
$$\begin{bmatrix} \sigma' \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos^2\alpha \\ -\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha \end{bmatrix}$$

pour $\sigma' = 2$ N/mm$^2$ on obtient que $\alpha = \pm 63.43°$ et $\tau' = \pm 4.0$ N/mm$^2$

(Ou simplement $\sigma' = \underline{n}^t \boldsymbol{\sigma} \underline{n}$ avec $\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$ le vecteur normal à la surface, et $\tau' = \underline{t}^t \boldsymbol{\sigma} \underline{n}$ avec $\underline{t} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$ le vecteur tangent à la surface.)

**Exercice 2 : *Exercice 3, examen 2016***

Dans cet exercice, on s'intéresse à une plaque rectangulaire percée. Le trou est centré sur l'origine du repère et a un rayon de $a$. La plaque est d'épaisseur $h$. La plaque est soumise à une contrainte uniaxiale statique, $\sigma_{xx} = \text{constante} = p$, à ses extrémités.




La solution pour un matériau élastique linéaire isotrope est connue :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{p}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left[1+\left(1-3\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right] \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{p}{2}\left[1+\frac{a^2}{r^2}-\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1+3\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta
\end{aligned} \tag{1}$$

1. Vérifier que cette solution satisfait aux conditions aux limites en contraintes.
2. Où est-ce que $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale ? Donner sa valeur.
3. Trouver où dans la plaque $\tau_{r\theta}$ est maximale, et donner sa valeur.

Pour la suite, nous ne considérons que l'état de contrainte au bord du trou ($r = a$).

4. Donner l'emplacement et la valeur de la contrainte maximale de cisaillement $\tau_{\max}$. Sur quel plan agit elle ?
5. Quelle est la valeur du facteur d'intensité de contrainte $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{xx}}$ ?

**Solution :**

1. Sur le bord du trou, la structure est libre d'efforts. Ainsi, il faut vérifier que

$$\begin{aligned}
&\forall\theta,\ \underline{\underline{\sigma}}(r=a)\underline{e}_r = \underline{0} \\
&\forall\theta,\ \sigma_{rr}(r=a) = 0 \text{ et } \tau_{r\theta}(r=a) = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

   C'est bien le cas puisque lorsque $r = a$ le facteur $\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$ s'annule.

   Il faut également vérifier les conditions aux limites en effort sur le périmètre de la plaque, c'est-à-dire loin du trou. Ainsi, lorsque r tend vers l'infini et que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on a bien $\sigma_{rr} = p$.
2. On sait que $\cos 2\theta$ vaut -1 en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\sigma_{\theta\theta}$ est maximum en $r = a$ et $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ et vaut $3p$.
3. Cherchons l'endroit dans la plaque où $\tau_{r\theta}$ est maximum. $\sin 2\theta$ est maximum en $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ et le produit $\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1+3\frac{a^2}{r^2}\right)$ est maximum en $\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire en $r = a\sqrt{3}$. A ce moment, $\tau_{r\theta}(a\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4}+k\pi) = \frac{2p}{3}$
4. A présent, on se place au bord du trou. Les champs de contraintes deviennent :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 0 \\
\sigma_{\theta\theta} &= p\left(1-2\cos 2\theta\right) \\
\tau_{r\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Le cisaillement maximal est $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \\ \tau_{max} &= \frac{3p}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

Elle agit sur le plan de normale $-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\underline{e}_x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\underline{e}_y$

5. La contrainte maximale $\sigma_{max}$ est la contrainte calculée à la question 2. Ainsi

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{xx}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(a, \frac{\pi}{2})}{p} = 3 \tag{5}$$