MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS Nom: ______________________
BS - SGC - EPFL Prénom: ______________________
Lausanne, 28 Janvier 2016

Correction de la partie pratique
Total 26 points

Exercice 1 (*10 points*)

1. Les conditions limites sont résumées dans la table 1.

TABLE 1 – Conditions limites

Surface	Condition	Composantes de σ
$x = 0 \setminus (0,0,0)$	$\underline{t} = 0$	$\sigma_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$
$x = L$	$\underline{t} = 0$	$\sigma_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$
$y = 0$	$u_y = 0$	$\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$
$y = a$	$\underline{t} = 0$	$\sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$
$z = 0$	$u_z = 0$	$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$
$z = a$	$\underline{t} = 0$	$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

Avec la condition supplémentaire que $u_x(0,0,0) = 0$.

2. L'équation d'équilibre s'écrit :
$$\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{b} = 0 \tag{1}$$
Pour $\underline{\underline{\sigma}} = 0$, cette équation est satisfaite car il n'y a pas de force volumique appliquée à la poutre.

3. La loi de Hooke pour un solide élastique soumis à un champ de température θ s'écrit :
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \alpha\theta\delta_{ij} \tag{2}$$
Puisque $\sigma_{ij} = 0$ et $\theta = \gamma x$, on a :
$$\epsilon_{ij} = \alpha\gamma x\delta_{ij} \tag{3}$$
$\underline{\underline{\epsilon}}$ étant linéaire en x, les dérivées secondes des équations de compatibilité sont toutes nulles. La compatibilité est satisfaite.

4. Le champ de déplacement a la forme :
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma x \end{pmatrix} \tag{4}$$
Ce champ étant linéaire en x, toutes les dérivées des conditions de compatibilité cinématique sont nulles. Les conditions sont donc satisfaites. On peut intégrer la déformation pour trouver $\underline{u}$:
$$u_x(x,y,z) = \frac{1}{2}\alpha\gamma x^2 + f_1(y,z) \tag{5}$$
$$u_y(x,y,z) = \alpha\gamma xy + f_2(x,z) \tag{6}$$
$$u_z(x,y,z) = \alpha\gamma xz + f_3(x,y) \tag{7}$$

Où f_1, f_2 et f_3 sont les constantes d'intégration à déterminer. En utilisant les conditions aux limites, on a :

$$u_y(x,0,z) = f_2(x,z) = 0 \quad \forall(x,z) \tag{8}$$
$$u_z(x,y,0) = f_3(x,y) = 0 \quad \forall(x,y) \tag{9}$$

Ce qui donne :

$$u_x(x,y,z) = \frac{1}{2}\alpha\gamma x^2 + f_1(y,z) \tag{10}$$
$$u_y(x,y,z) = \alpha\gamma xy \tag{11}$$
$$u_z(x,y,z) = \alpha\gamma xz \tag{12}$$

Pour trouver f_1, on utilise le fait que $\epsilon_{12} = 0$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\alpha\gamma y \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement pour $\epsilon_{13} = 0$ et en utilisant le fait que $u_x = 0$ à l'origine, on obtient :

$$u_x(x,y,z) = \frac{1}{2}\alpha\gamma\left(x^2 - y^2 - z^2\right) \tag{13}$$
$$u_y(x,y,z) = \alpha\gamma xy \tag{14}$$
$$u_z(x,y,z) = \alpha\gamma xz \tag{15}$$

5. L'augmentation locale de volume est :

$$\mathrm{Tr}(\underline{\epsilon}) = 3\alpha\gamma x \tag{16}$$

L'augmentation totale de volume est donc :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_V \mathrm{Tr}(\underline{\epsilon})\,\mathrm{d}V \\ &= a^2\int_0^L 3\alpha\gamma x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}\alpha\gamma a^2 L^2 \end{aligned}$$

Exercice 2 (*10 points*)

1. (a) Pour la barre 1, $u(x) = -\frac{2\delta}{h}x + 2\delta$, $\epsilon(x) = -\frac{2\delta}{h}$, $\sigma(x) = -\frac{2\delta}{h}E_1$ et $N_1 = -\frac{2\delta}{h}E_1A_1$.
Même raisonnement pour la barre 2, $u(x) = \frac{2\delta}{h}x$, $\epsilon(x) = \frac{2\delta}{h}$, $\sigma(x) = \frac{2\delta}{h}E_2$ et $N_2 = \frac{2\delta}{h}E_2A_2$.

(b) L'énergie élastique est

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{el}} &= \frac{1}{2}\int_V \sigma : \epsilon\,\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\left(A_2\int_0^{\frac{h}{2}} E_2(\frac{2\delta}{h})^2\,\mathrm{d}x + A_1\int_{\frac{h}{2}}^{h} E_1(-\frac{2\delta}{h})^2\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\delta^2}{h}(E_1A_1 + E_2A_2) \end{aligned}$$

L'énergie potentielle est :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} - W_{\text{Fext}} = \frac{\delta^2}{h}(E_1A_1 + E_2A_2) + P\delta$$

(c)

$$\begin{aligned} & \tfrac{\mathrm{d}E_{\text{pot}}}{\mathrm{d}\delta} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{2\delta}{h}(E_1A_1 + E_2A_2) + P = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \delta = -\tfrac{P}{2}\tfrac{h}{E_1A_1+E_2A_2} \end{aligned}$$

(d) Non car le champ de déplacement dans une barre soumise à une force à son extrémité est linéaire.

2. (a)

$$E_{\text{el}} = \frac{\delta^2}{h}(E_1A_1 + E_2A_2)$$

Le travail des forces est exprimé ainsi :

$$\begin{aligned} W_{\text{Fext}} &= \int_V -\rho g u \,\mathrm{d}V \\ &= -A_2 \int_0^{\frac{h}{2}} \rho_2 g u(x)\,\mathrm{d}x - A_1 \int_{\frac{h}{2}}^{h} \rho_1 g u(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -g\frac{\delta h}{4}(A_1\rho_1 + A_2\rho_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{el}} - W_{\text{Fext}} = \frac{\delta^2}{h}(E_1A_1 + E_2A_2) + g\frac{\delta h}{4}(A_1\rho_1 + A_2\rho_2)$$

(b)

$$\begin{aligned} & \tfrac{\mathrm{d}E_{\text{pot}}}{\mathrm{d}\delta} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{2\delta}{h}(E_1A_1 + E_2A_2) + g\tfrac{h}{4}(A_1\rho_1 + A_2\rho_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \delta = -\tfrac{gh^2}{8}\tfrac{A_1\rho_1+A_2\rho_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{aligned}$$

(c) Oui car une barre soumise à une force répartie constante a un champ de déplacement quadratique.

Exercice 3 (***6 points***)

1. Sur le bord du trou, la structure est libre d'efforts. Ainsi, il faut vérifier que

$$\begin{aligned} &\forall\theta,\ \underline{\underline{\sigma}}(r=a)\underline{e}_r = \underline{0} \\ &\forall\theta,\ \sigma_{rr}(r=a) = 0 \text{ et } \tau_{r\theta}(r=a) = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

C'est bien le cas puisque lorsque $r = a$ le facteur $\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$ s'annule.
Il faut également vérifier les conditions aux limites en effort sur le périmètre de la plaque, c'est-à-dire loin du trou. Ainsi, lorsque r tend vers l'infini et que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on a bien $\sigma_{rr} = p$.

2. On sait que $\cos 2\theta$ vaut -1 en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\sigma_{\theta\theta}$ est maximum en $r = a$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ et vaut $3p$.

3. Cherchons l'endroit dans la plaque où $\tau_{r\theta}$ est maximum. $\sin 2\theta$ est maximum en $\theta = \frac{\pi}{4}$ et le produit $\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\left(1 + 3\frac{a^2}{r^2}\right)$ est maximum en $\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire en $r = a\sqrt{3}$. A ce moment, $\tau_{r\theta}(a\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4}) = \frac{2p}{3}$

4. A présent, on se place au bord du trou. Les champs de contraintes deviennent :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= p\,(1 - 2\cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

   Le cisaillement maximal est $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \\ \tau_{max} &= \frac{3p}{2} \end{aligned} \tag{19}$$

   Elle agit sur le plan de normale $-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\underline{e}_x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\underline{e}_y$

5. La contrainte maximale σ_{max} est la contrainte calculée à la question 2. Ainsi

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{xx}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(a, \frac{\pi}{2})}{p} = 3 \tag{20}$$