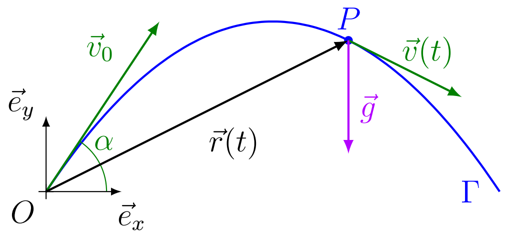
Exemple de mouvement uniformément accéléré : tir au canon

A l'instant $t_0 = 0$, on tire depuis le sol un obus avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec le sol. L'origine O est choisie à l'endroit du tir.

En négligeant les frottements dans l'air, l'obus tiré est en chute libre :



$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \vec{g} \\ \vec{v}(t) &= \vec{g}t + \vec{v}_0 \\ \vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t\,. \end{aligned}$$

- Projections
  - selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 \\ v_x(t) &= v_{0x} \\ x(t) &= v_{0x}t \end{aligned}$$

  - selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned} a_y(t) &= -g \\ v_y(t) &= -gt + v_{0y} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t\,. \end{aligned}$$

- Montrons que la trajectoire est alors une parabole d'axe parallèle à $\vec{g}$. De $x(t)$, nous tirons $t(x) = \frac{x}{v_{0x}}$ et obtenons

$$y(x) = -\frac{g}{2v_{0x}^2}\,x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x\,.$$

  Cette expression du second degré décrit bien une parabole.

- Hauteur maximale h : critère $v_y(t_h) = 0$

$$v_y(t_h) = -gt_h + v_{0y} = 0 \;\Rightarrow\; t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

$$h = y(t_h) = -\frac{1}{2}gt_h^2 + v_{0y}t_h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\,.$$

- Temps de vol t_v : critère $y(t_v) = 0$

$$y(t_v) = t_v\left(-\frac{1}{2}gt_v + v_{0y}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad t_v = 0 \;\text{ ou }\; t_v = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\,.$$

- Distance horizontale d :

$$d = x(t_v) = v_{0x}t_v = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}\,.$$

- Angle de tir et parabole de sécurité : disposant d'une vitesse initiale de norme v_0 fixée, on se demande quelle doit être la valeur de l'angle α pour que l'obus atteigne un point $P(x_P, y_P)$. Critère : P est sur la parabole Γ

$$\Gamma : \quad y(x) = \frac{a_0}{2v_{0x}^2}\, x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\, x \; = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2 + \operatorname{tg} \alpha \, x \, .$$

Avec $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, nous avons

$$y_P = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\, x_P^2 + \operatorname{tg} \alpha \, x_P \, .$$

C'est une équation du second degré en $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\frac{g x_P^2}{2v_0^2}\, \operatorname{tg}^2 \alpha - x_P \, \operatorname{tg} \alpha + \frac{g x_P^2}{2v_0^2} + y_P = 0 \, .$$

L'existence de solution dépend du signe du discriminant

$$\Delta = x_P^2 \left(1 - \frac{2g}{v_0^2} \left(\frac{g x_P^2}{2v_0^2} + y_P \right) \right) \, .$$

Ce discriminant est fonction des coordonnées de P :

- Pour $\Delta > 0$, il y a deux angles de tir possibles. P est à portée du canon.

- Pour $\Delta = 0$, il y a un unique angle de tir possible. Tous les points P vérifiant $\Delta = 0$ se trouvent sur une parabole, dite de sécurité, d'équation

$$y = -\frac{g x^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \, ,$$

  et représentée en rouge ci-dessous.

- Pour $\Delta < 0$, il n'y a aucun angle de tir possible. Le point P est au-delà de la parabole de sécurité.