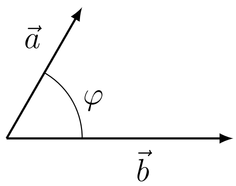
$$\boxed{\textbf{Deux intermèdes}}$$

1 Produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\cos\varphi$



$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\cos\varphi}$$

où φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Le produit scalaire est une mesure du parallélisme de deux vecteurs.

Rem. :

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont plutôt du même côté $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} > 0$
  en particulier, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ et de même sens $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||$
- $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont plutôt opposés $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} < 0$
  en particulier, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ et de sens opposé $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = -||\vec{a}||\,||\vec{b}||$
- $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux (ou l'un ou l'autre nul) $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
- $\vec{a}\cdot\vec{a} = ||\vec{a}||^2$
- $||\vec{b}|| = 1 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,\cos\varphi$ est la projection algébrique (avec signe) de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

Ex. : nous pouvons ainsi obtenir les composantes d'un vecteur $\vec{b}$ dans un repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ par produit scalaire : $b_x = \vec{b}\cdot\vec{e}_x$ et $b_y = \vec{b}\cdot\vec{e}_y$.

2 Taux de variation d'un produit

Le taux de variation d'un produit (algébrique, scalaire ou vectoriel) se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(AB) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(AB)}{\Delta t}\\
\Delta(AB) &= A(t+\Delta t)\,B(t+\Delta t) - A(t)\,B(t)\\
&= A(t+\Delta t)\,B(t+\Delta t) - A(t)\,B(t+\Delta t)\\
&\qquad + A(t)\,B(t+\Delta t) - A(t)\,B(t)\\
&= (A(t+\Delta t) - A(t))\,B(t+\Delta t) + A(t)\,(B(t+\Delta t) - B(t))\\
&= \Delta A\,B(t+\Delta t) + A(t)\,\Delta B\\
\frac{d}{dt}(AB) &= \dot{A}B + A\dot{B}\,.
\end{aligned}$$

Pour un vecteur $\vec{v} = v\vec{e}_t$:

$$\frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t\,.$$

Pour le carré de sa norme :

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\,.$$