Loi de Newton et théorème de l'énergie cinétique

Objet considéré : le CM d'un corps de masse m.

Evolution

2^{e} loi de Newton : $\boxed{\vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}} \quad \forall\, t}$

Loi d'évolution + condition initiale à t_0 ($\vec{r}_{\text{CM}}(t_0)$ et $\vec{v}_{\text{CM}}(t_0)$) $\Rightarrow$ mouvement déterminé.

- Repère fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$: $\left\{\begin{array}{lcl} F_x^{\text{ext}} & = & ma_{\text{CM},x} \\ F_y^{\text{ext}} & = & ma_{\text{CM},y} \end{array}\right.$

  Intérêt : en cas de séparabilité du mouvement dans ces deux directions, programmation.

- Repère lié $(\vec{e}_n, \vec{e}_t)$: $\left\{\begin{array}{lcl} F_n^{\text{ext}} & = & ma_{\text{CM},n} \\ F_t^{\text{ext}} & = & ma_{\text{CM},t} \quad \text{ou} \quad E_{\text{cin,CM}}(t_2) - E_{\text{cin,CM}}(t_1) \; = \; W_{1\to 2}^{\text{ext}} \end{array}\right.$

  Intérêt : séparation des mouvements normal à la trajectoire et le long de la trajectoire.

  ◇ Selon $\vec{e}_n$: changement instantané de direction de la vitesse ssi $a_n \neq 0$ (effectuer un virage), mise en évidence des forces normales (soutien, force centripète dans un mouvement circulaire, ...)

  ◇ Selon $\vec{e}_t$: changement instantané de norme de la vitesse ssi $a_t \neq 0$ (aller plus vite ou moins vite), mise en évidence des forces tangentielles (frottement, propulsion, freinage, ...)
  On peut aussi considérer le bilan des changements entre deux instants t_1 et t_2 donné par le théorème de l'énergie cinétique pour le CM, obtenu de $\vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$ par un produit scalaire avec $\vec{v}_{\text{CM}}$.

Théorème de l'énergie cinétique pour le CM

Changement d'énergie cinétique du CM pendant un intervalle de temps infinitésimal dt :

$$dE_{\text{cin,CM}} = dW^{\text{ext}} = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}} \,,$$

dW^{ext} étant le travail infinitésimal de $\vec{F}^{\text{ext}}$ sur le déplacement infinitésimal $d\vec{r}_{\text{CM}}$.

Changement d'énergie cinétique du CM pendant un intervalle $[\,t_1, t_2\,]$:

$$E_{\text{cin,CM}}(t_2) - E_{\text{cin,CM}}(t_1) = W_{1\to 2}^{\text{ext}} = \underset{\text{le long de }\Gamma}{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}} \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}} \,,$$

où $\vec{r}_1 = \vec{r}_{\text{CM}}(t_1)$ et $\vec{r}_2 = \vec{r}_{\text{CM}}(t_2)$. C'est le théorème de l'énergie cinétique pour le CM : la variation de l'énergie cinétique est donnée par le travail des forces.

Forces conservatives

Si le travail d'une force ne dépend pas du chemin Γ mais que de ses extrémités $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, la force est dite conservative. On peut alors écrire son travail comme la différence d'une énergie potentielle associée à cette force

$$W_{1\to 2}(\vec{F}^{\text{ext}}_{\text{cons}}) = \underset{\text{le long de }\Gamma}{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}} \vec{F}^{\text{ext}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}} = E_{\text{pot,CM}}(\vec{r}_1) - E_{\text{pot,CM}}(\vec{r}_2)\,.$$

L'énergie mécanique du CM est la somme de son énergie cinétique et de toutes les énergies potentielles :

$$E_{\text{méc,CM}} = E_{\text{cin,CM}} + E_{\text{pot,CM}}\,.$$

Le théorème de l'énergie cinétique donne alors le changement de l'énergie mécanique du CM pendant un intervalle $[\,t_1, t_2\,]$:

$$E_{\text{méc,CM}}(t_2) - E_{\text{méc,CM}}(t_1) = W_{1\to 2}(\vec{F}^{\text{ext}}_{\text{non cons}})\,.$$

Enfin, si toutes les forces extérieures sont conservatives (ou ne travaillent pas), l'énergie mécanique du CM est conservée :

$$E_{\text{méc,CM}}(t_1) = E_{\text{méc,CM}}(t_2).$$

Remarque

Ce passage d'une description vectorielle instantanée (Newton) à un bilan exprimé par un scalaire, l'énergie, fournit une approche qui est très efficace, mais qui, selon les cas, peut aussi s'avérer insuffisante.