Physique
Semestre d'automne 2024

Roger Sauser
Guido Burmeister
https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14848

Corrigé 8

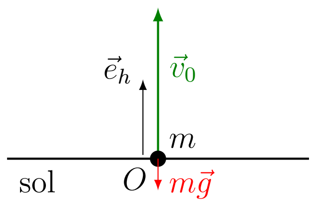
Exercice 1

Nous allons exploiter le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants t_i et t_j :

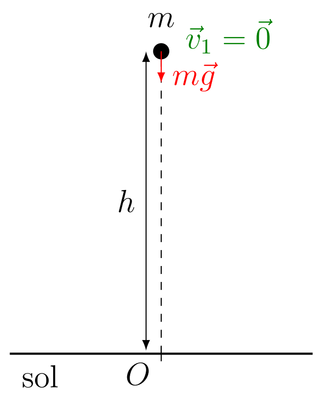
$$E_{\text{cin}}(t_j) - E_{\text{cin}}(t_i) = W^{\text{ext}}_{t_i \to t_j}\,.$$

(a) Nous allons considérer les deux instants suivants :

i) temps t_0 (lancer)



ii) temps t_1 (sommet)



En absence de frottements, la seule force exercée sur la masse est le poids :

$$E_{\text{cin}}(t_1) - E_{\text{cin}}(t_0) = W_{0\to 1}(m\vec{g}) = mg(h_0 - h_1)\,.$$

Avec le choix de l'origine des hauteurs au sol, $h_0 = 0$ et $h_1 = h$. A la hauteur maximale h, l'objet s'arrête : $v_1 = 0$. Ainsi

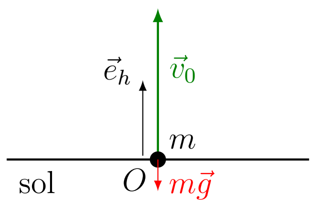
$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 - mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}\,.$$

Alternativement : l'énergie mécanique étant conservée,

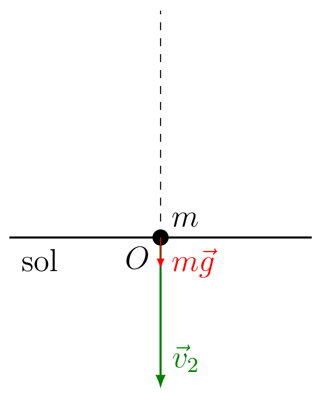
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}\,.$$

(b) Nous allons considérer les deux instants suivants :

i) temps t_0 (lancer)



ii) temps t_2 (retour au sol)



Nous supposons, comme au point (a), que le frottement avec l'air est négligeable :

$$E_{\text{cin}}(t_2) - E_{\text{cin}}(t_0) = W_{0\to 2}(m\vec{g}) = mg(h_0 - h_2)\,.$$

Comme $h_2 = h_0$,

$$v_2 = v_0\,.$$

Vectoriellement, la vitesse $\vec{v}_2$ est opposée à la vitesse initiale :

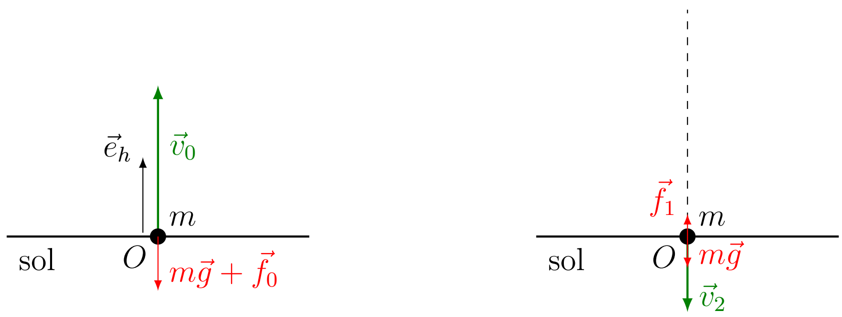
$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_0\,.$$

Alternativement : l'énergie mécanique étant conservée,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = v_0\,.$$

(c) Remarquons qu'en présence de frottements, l'énergie (mécanique) n'est pas conservée. Nous allons considérer les deux instants suivants :

i) temps t_0 (lancer) ii) temps t_2 (retour au sol)



Nous supposons cette fois que le frottement $\vec{f} = \vec{f}(t)$ avec l'air n'est pas négligeable. L'énergie mécanique de la masse diminue donc entre l'instant t_0 et l'instant t_2, et

$$v_2 = \frac{v_0}{2} < v_0\,.$$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les instants t_0 et t_2 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(0) &= \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= W_{0\to 2}^{\text{ext}} = W_{0\to 2}(m\vec{g}) + W_{0\to 2}(\vec{f}) = 0 + W_{0\to 2}(\vec{f})\,. \end{aligned}$$

Le travail de la force de freinage est donc donné par

$$W_{0\to 2}(\vec{f}) = -\frac{3}{8}mv_0^2\,.$$

Exercice 2

Comme on suppose qu'il n'y a pas de frottement, les seules forces agissant sur la luge de masse m (l'objet) pendant la descente sont la force de gravitation et le soutien du sol.
Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc

$$E_{\text{cin,bas}} - E_{\text{cin,haut}} = W_{\text{haut}\to\text{bas}}(m\vec{g}) + W_{\text{haut}\to\text{bas}}(\vec{S})\,.$$

Le travail du poids est positif, car $m\vec{g}\cdot d\vec{r}_{\mathrm{CM}} > 0$. Il est donné par la différence de hauteur :

$$W_{\text{haut}\to\text{bas}}(m\vec{g}) = mg(h_{\text{haut}} - h_{\text{bas}}) = mgh\,.$$

Le travail du soutien est nul, car $\vec{S} \perp d\vec{r}_{\mathrm{CM}}$.
Ainsi

$$\frac{1}{2}mv_{\text{bas}}^2 = mgh \Rightarrow v_{\text{bas}} = ||\vec{v}_{\text{bas}}|| = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2\cdot 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,,$$

où l'on a pris $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Alternativement, on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En effet, en absence de frottement, la luge est soumise à la force de gravitation (qui est une force conservative) et au soutien (qui est toujours perpendiculaire à la vitesse). L'énergie mécanique est donc conservée :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}} = \text{constante}\,.$$

En choisissant comme niveau de référence le bas de la piste, l'énergie mécanique s'écrit ...

... en haut de la piste (avec une vitesse initiale nulle et une hauteur h) :

$$E_{\text{méc.}}(1) = E_{\text{pot.}} = mgh\,;$$

... en bas de la piste (avec une vitesse finale de norme v et une hauteur nulle) :

$$E_{\text{méc.}}(2) = E_{\text{cin.}} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

La conservation de l'énergie mécanique fournit alors

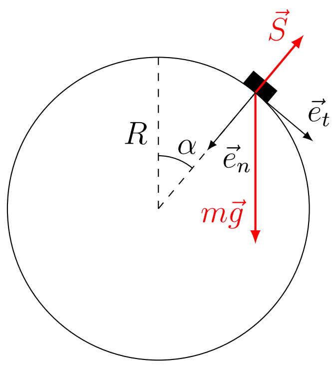
$$E_{\text{méc.}}(1) = E_{\text{méc.}}(2) \quad\Leftrightarrow\quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2\cdot 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

où l'on a pris $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Exercice 3

Le wagonnet gagne en vitesse et finit par décrocher.
Exploitons la condition de décrochement pour l'endroit où m quitte la boule et déterminer une relation entre vitesse et position du wagonnet.

Considérer d'abord une position quelconque pour le wagonnet.



Objet : wagonnet

Forces : poids, soutien

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Le décrochement du wagonnet de la surface de la boule est caractérisé par la disparition du soutien : $\vec{S} = \vec{0}$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$mg\sin\alpha = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

Au point D du décrochement repéré par l'angle α_D , $S = 0$:

$$mg\cos\alpha_D = m\frac{v_D^2}{R} \Rightarrow Rg\cos\alpha_D = v_D^2\,.$$

La projection selon $\vec{e}_t$ est exploitée à travers le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{\text{cin,décroch.}} - E_{\text{cin,dép.}} = W_{\text{dép.}\to\text{décroch.}}(m\vec{g}) + W_{\text{dép.}\to\text{décroch.}}(\vec{S})\,.$$

Le travail du poids est positif, car $m\vec{g}\cdot d\vec{r}_{\text{CM}} > 0$. Il est donné par la différence de hauteur :

$$W_{\text{haut}\to\text{bas}}(m\vec{g}) = mg(h_{\text{haut}} - h_{\text{bas}}) = mgR(1-\cos\alpha_D)\,.$$

Le travail du soutien est nul, car $\vec{S} \perp d\vec{r}_{\text{CM}}$.
Ainsi

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = mgR(1-\cos\alpha_D) \Rightarrow v_D^2 = 2gR(1-\cos\alpha_D)\,.$$

C'est une relation entre la vitesse et la position du wagonnet lors du décrochement.

Alternativement, on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En effet toutes les forces exercées sur le wagonnet sont conservatives (poids) ou ne travaillent pas (soutien). Par conséquent, l'énergie mécanique du wagonnet est conservée.
En choisissant l'origine des hauteurs au niveau du centre du cercle, on a

- Au point de départ (1) (à $\alpha = 0$), la vitesse du wagonnet est nulle et sa hauteur R :

$$E_{\text{méc}}(1) = mgR\,.$$

- Au point de dérochement (2) (à α_D), le wagonnet une vitesse de norme v_D et se trouve à la hauteur $h_D = R\cos\alpha_D$:

$$E_{\text{méc}}(2) = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgR\cos\alpha_D\,.$$

La conservation de l'énergie mécanique donne donc

$$mgR = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgR\cos\alpha_D \Rightarrow v_D^2 = 2gR(1-\cos\alpha_D)\,.$$

C'est une relation entre la vitesse et la position du wagonnet lors du décrochement.

Des deux équations, on déduit α_D .
On a $v_D^2 = Rg\cos\alpha_D$ et $v_D^2 = 2gR(1-\cos\alpha_D)$. Alors

$$Rg\cos\alpha_D = 2gR(1-\cos\alpha_D) \Leftrightarrow 3\cos\alpha_D = 2 \Leftrightarrow \cos\alpha_D = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_D \approx 48.2°.$$

Exercice 4

Dans un premier temps, on caractérise la tension dans la corde. Puis, on détermine l'expression du travail de cette tension.
Les forces s'exerçant sur l'objet "masse M" sont le poids $M\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ de la corde.
La deuxième loi de Newton s'écrit donc

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a} \equiv \vec{0}\,.$$

En effet, l'accélération de la masse est nulle car cette dernière s'élève à vitesse constante. Ainsi, la tension est constante et vaut

$$T = Mg\,.$$

On exploite le fait que la tension est constante durant l'élévation pour calculer le travail de cette dernière depuis le sol (position $\vec{r}_1$) jusqu'à une hauteur de 10 m (position $\vec{r}_2$) :

$$W(\vec{T}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{T} \cdot d\vec{r} = \int_0^h T ds = T \int_0^h ds = Th\,.$$

On peut alors donner l'expression de la tension :

$$T = \frac{W(\vec{T})}{h} = \frac{5000}{10} = 500\,\mathrm{N}.$$

Remarque

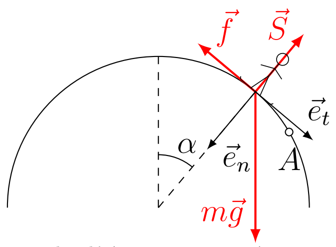
Connaissant T, il est possible de déterminer la masse :

$$M = \frac{T}{g} \cong \frac{500}{10} = 50\,\mathrm{kg}\,,$$

où l'on a posé $g \cong 10\,\mathrm{m/s}^2$.

Exercice 5

Le surfeur gagne en vitesse et finit par décrocher. Remarquons qu'il décroche plus tard que dans le cas d'une bosse parfaitement lisse : il y a des frottements.



Objet : surfeur

Forces : poids, soutien, frottement

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a}\,.$$

Théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point de décrochement A :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(A) - E_{\text{cin}}(\text{dép}) &= W^{\text{ext}}_{\text{dép}\to A} \\ &= W_{\text{dép}\to A}(m\vec{g}) + W_{\text{dép}\to A}(\vec{S}) + W_{\text{dép}\to A}(\vec{f}) \\ &= mgr - mg\frac{r}{2} + W_{\text{dép}\to A}(\vec{f}) \end{aligned}$$

avec l'origine des hauteurs au niveau du centre de l'arc de cercle.

Le surfeur décroche au point A.

Selon $\vec{e}_n$, pour un point quelconque :

$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v^2}{r}\,.$$

Au point A du décrochement repéré par l'angle $\alpha_A = \frac{\pi}{3}$, $S = 0$:

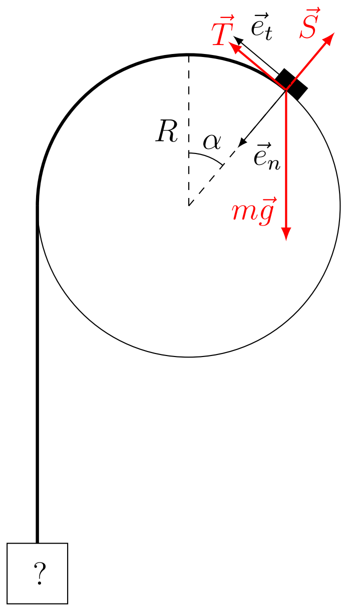
$$mg\cos\frac{\pi}{3} = m\frac{v_A^2}{r} \Rightarrow gr = 2v_A^2\,.$$

Il vient alors
$$W_{\text{dép}\to A}(\vec{f}) = \frac{m}{2}(v_A^2 - gr) = \frac{m}{2}\left(\frac{gr}{2} - gr\right) = -\frac{mgr}{4}\,.$$
Ce travail est la variation de l'énergie "utile" (énergie mécanique). Le surfeur a donc dissipé par frottement une énergie
$$E_{\text{diss}} = \frac{mgr}{4}\,.$$

Exercice 6

La question porte sur la masse m. On peut donc la considérer comme l'objet à étudier.

(a) La masse m gagne en vitesse et finit par décrocher au sommet.
Considérer d'abord une position quelconque pour la masse m.



Objet : m

Forces : poids, soutien, tension
$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = m\vec{a}_m\,.$$
Le décrochement de la masse de la surface de la boule est caractérisé par la disparition du soutien : $\vec{S} = \vec{0}$.

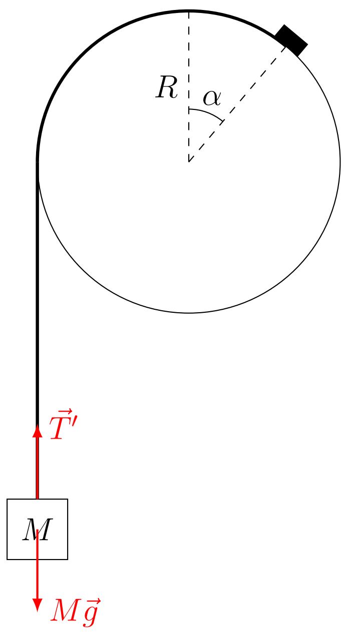
La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:
$$-mg\sin\alpha + T = ma_t\,.$$
Selon $\vec{e}_n$:
$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$
Au point D du décrochement repéré par l'angle $\alpha_D = 0$, $S = 0$:
$$mg\cos 0 = m\frac{v_D^2}{R} \Rightarrow v_D = \sqrt{Rg}\,.$$
Remarque : si la seconde masse, notée M, est trop petite, la vitesse de m sera trop faible pour qu'elle décolle au sommet. Si M est trop grande, m décolle avant.

(b) Le lien entre m et la masse inconnue M est le fil tendu. La tension est une force tangentielle, autant pour m que pour M. C'est donc une force qui travaille contribuant ainsi à la modification des énergies cinétiques de m et de M.
Le théorème de l'énergie cinétique (Newton intégré selon $\vec{e}_t$) entre le point de départ et le sommet s'écrit
$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) &= W_{1\to2}(m\vec{g}) + W_{1\to2}(\vec{S}) + W_{1\to2}(\vec{T}) \\ \frac{1}{2}mv_D^2 - 0 &= -mgR + 0 + W_{1\to2}(\vec{T})\,. \end{aligned}$$

Le travail de la tension $W_{1\to 2}(\vec{T}) = \int_1^2 \vec{T} \cdot d\vec{r}_m$ est positif, $\vec{T}$ et $d\vec{r}_m$ étant parallèles et de même sens.

Remarque : la tension n'étant pas conservative, l'énergie mécanique n'est pas conservée !

Considérer M comme second objet : il subit également la tension.



Objet : M

Forces : poids, tension

$$M\vec{g} + \vec{T}' = M\vec{a}_M\,.$$

Le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point atteint lorsque m passe au sommet

$$\frac{1}{2}MV_D^2 - 0 = MgR\frac{\pi}{2} + W_{1\to 2}(\vec{T}')\,,$$

M étant descendue de $R\frac{\pi}{2}$.
Le travail de la tension $W_{1\to 2}(\vec{T}') = \int_1^2 \vec{T}' \cdot d\vec{r}_M$ est négatif, $\vec{T}'$ et $d\vec{r}_M$ étant parallèles et de sens opposé.

Considérer les liaisons entre les objets choisis.
Liaison : à chaque instant, les vitesses de m et M sont de même norme ($||\vec{V}|| = ||\vec{v}||$), tout comme les tensions ($||\vec{T}'|| = ||\vec{T}||$). Alors

$$\vec{T}' \cdot d\vec{r}_M = -\vec{T} \cdot d\vec{r}_m \quad \Rightarrow \quad W_{1\to 2}(\vec{T}') = -W_{1\to 2}(\vec{T})\,.$$

En éliminant les travaux par addition des équations, nous obtenons (avec $V_D = v_D$)

$$\frac{1}{2}(m+M)v_D^2 = -mgR + MgR\frac{\pi}{2}\,,$$

d'où, avec $v_D^2 = Rg$,

$$M = \frac{3}{\pi - 1}m\,.$$