Physique
Semestre d'automne 2024

Roger Sauser
Guido Burmeister

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14848

Corrigé 3

Exercice 1

On choisit un repère horizontal $\vec{e}_x$ dirigé selon la vitesse initiale de la luge.
La condition initiale est $x(0) = 0\,\mathrm{m}$ (choix de l'origine) et $v(0) = v_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
L'accélération de la luge est constante : $a(t) = a_0 = -0.5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
La vitesse et la position de la luge sont donc données par (MUA)

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 t + v_0\,, \\ x(t) &= \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t\,. \end{aligned}$$

(a) Après $t_1 = 1\,\mathrm{s}$, la vitesse vaut donc

$$v(t_1) = a_0 t_1 + v_0 = -0.5\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 1\,\mathrm{s} + 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 4.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

(b) La distance de freinage est parcourue pendant le temps de freinage t_f défini par la condition d'arrêt de la luge ($v(t_f) = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) :

$$v(t_f) = a_0 t_f + v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = -\frac{v_0}{a_0} = -\frac{5\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{-0.5\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 10\,\mathrm{s}\,.$$

La distance de freinage d_f est alors donnée par

$$d_f = x(t_f) = \frac{1}{2}a_0 t_f^2 + v_0 t_f = 25\,\mathrm{m}.$$

(c) La distance $d = 1\,\mathrm{m}$ a été parcourue au temps t_d :

$$x(t_d) = \frac{1}{2}a_0 t_d^2 + v_0 t_d = d\,.$$

Cette équation possède deux solutions positives. Seule la plus petite a un sens :

$$t_d = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_0 d}}{a_0} \cong 0.202\,\mathrm{s}.$$

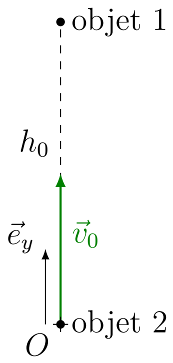
On note que ce temps t_d est bien légèrement supérieur à celui que l'on aurait en absence de freinage ($t = 0.2\,\mathrm{s}$).

La vitesse au temps t_d vaut alors $v(t_d) \cong 4.899\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Exercice 2

On commence par visualiser et représenter la situation grâce à un dessin soigné. On choisit ensuite, judicieusement, un repère pour la description des mouvements. Pour appliquer le critère de rencontre, il convient de déterminer la position des deux objets à chaque instant.

Notons h_0 la hauteur initiale de l'objet 1 et $\vec{v}_0$ la vitesse initiale de l'objet 2 :



Remarque : tous les mouvements se font selon la verticale.

(a) **Critère de rencontre :**

$$\exists\, t_r,\ \vec{r}_1(t_r) = \vec{r}_2(t_r)\,.$$

L'objet 1 est en chute libre.
Ainsi,

$$\vec{a}_1(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$a_1(t) = -g \quad \forall\, t\,.$$

Fixons l'origine au niveau du sol et l'instant $t = 0$ en début de chute.
La vitesse initiale est nulle. Alors,

$$\vec{v}_1(t) = \vec{g}\, t \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$v_1(t) = -gt \quad \forall\, t\,.$$

La position initiale se situe à la hauteur h_0. Alors,

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 + \vec{r}_{10} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0 \quad \forall\, t \quad \text{, avec } h_0 = +20\,\mathrm{m}\,.$$

L'objet 2 est en chute libre.
Ainsi,

$$\vec{a}_2(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$a_2(t) = -g \quad \forall\, t\,.$$

Remarque : pour pouvoir par la suite comparer les positions des deux objets, il faut prendre les mêmes origines spatiale et temporelle !
La vitesse initiale est verticale. Alors,

$$\vec{v}_2(t) = \vec{g}\, t + \vec{v}_0 \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$v_2(t) = -gt + v_0 \quad \forall\, t\,.$$

La position initiale est nulle. Alors,

$$\vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t \quad \forall t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad \forall t \quad \text{, avec } v_0 = +16\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

On applique alors le critère (vectoriel) pour la rencontre des objets.
Selon $\vec{e}_y$, la condition de rencontre est $y_1(t_r) = y_2(t_r)$:

$$-\frac{1}{2}gt_r^2 + h_0 = -\frac{1}{2}gt_r^2 + v_0 t_r \Rightarrow t_r = \frac{h_0}{v_0} = \frac{20\,\mathrm{m}}{16\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 1.25\,\mathrm{s}.$$

L'instant t_r existe, la rencontre a lieu.
Connaissant le mouvement des objets et l'instant de leur rencontre, on calcule l'endroit de la rencontre. Par exemple avec la position de l'objet 1 (égale à celle de l'objet 2),

$$y_1(t_r) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{h_0}{v_0}\right)^2 + h_0 = -\frac{1}{2}\cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot(1.25\,\mathrm{s})^2 + 20\,\mathrm{m} = 12.34\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Pour répondre à la question posée, on utlise un **critère d'arrivée au sol** : un objet est au sol si sa hauteur est nulle.
Objet 1 : il touche le sol à l'instant t_1 tel que

$$y_1(t_1) = 0\,.$$

Alors

$$y_1(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + h_0 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20\,\mathrm{m}}{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 2.02\,\mathrm{s}$$

Objet 2 : il touche le sol à l'instant t_2 tel que

$$y_2(t_2) = 0\,.$$

Alors

$$y_2(t_2) = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0 t_2 = \left(-\frac{1}{2}gt_2 + v_0\right)t_2 = 0\,.$$

Les solutions sont

$$t_2 = 0 \text{ (sans intérêt)} \qquad \text{ou} \qquad t_2 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\cdot 16\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3.26\,\mathrm{s}.$$

L'intervalle entre les impacts avec le sol est donc

$$t_2 - t_1 = 1.24\,\mathrm{s}.$$

(c) On modifie les conditions initiales pour satisfaire à la nouvelle condition de rencontre. Les équations du mouvement restent les mêmes, à la différence que la vitesse $\vec{v}_0$ n'est pas connue. Toutes les expressions obtenues pour le temps de rencontre et la hauteur de rencontre restent valables. En particulier, le temps de croisement est donné par $t_r = \dfrac{h_0}{v_0}$.
Nous cherchons v_0 telle que, à cet instant t_r, les objets se trouvent à mi-hauteur :

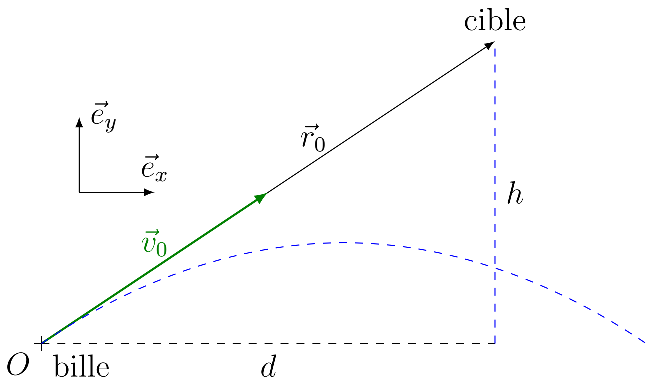
$$y_1(t_r) = y_2(t_r) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{h_0}{v_0}\right)^2 + h_0 = \frac{h_0}{2}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{gh_0} = \sqrt{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 20\,\mathrm{m}} = 14.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Exercice 3

On commence par visualiser et représenter la situation grâce à un dessin soigné. On choisit ensuite, judicieusement, un repère pour la description des mouvements. Pour appliquer le critère de rencontre, il convient de déterminer la position des deux objets à chaque instant.

Plaçons l'origine O à l'extrémité du tube de la sarbacane. Notons d et h les distances horizontale et verticale entre O et la cible. Appelons encore $\vec{v}_0$ la vitesse initiale de la bille lorsqu'elle quitte la sarbacane :



Avec le repère choisi, la position initiale de la cible est donnée par

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix} .$$

Choisissons enfin l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où la bille quitte la sarbacane.

La seule force exercée sur la bille est son poids. Pour la bille de masse m_b,

$$m_b \vec{a}_b = m_b \vec{g} \;\Rightarrow\; \vec{a}_b(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,.$$

Le mouvement de la bille est un MUA (chute libre) et nous en déduisons les équations pour la vitesse et la position de la bille :

$$\begin{aligned} \vec{v}_b(t) &= \vec{g}\,t + \vec{v}_0 \\ \vec{r}_b(t) &= \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} a_{bx}(t) &= 0 \\ v_{bx}(t) &= v_{0x} \\ x_b(t) &= v_{0x}t\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned} a_{by}(t) &= -g \\ v_{by}(t) &= -gt + v_{0y} \\ y_b(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t\,. \end{aligned}$$

La seule force exercée sur la cible est son poids. Pour la cible de masse m_c,

$$m_c\vec{a}_c = m_c\vec{g} \;\Rightarrow\; \vec{a}_c(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,.$$

Le mouvement de la cible est un MUA (chute libre) et nous en déduisons les équations pour la vitesse et la position de la cible :

$$\begin{aligned} \vec{v}_c(t) &= \vec{g}\,t \\ \vec{r}_c(t) &= \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{r}_0\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} a_{cx}(t) &= 0 \\ v_{cx}(t) &= 0 \\ x_c(t) &= d\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned} a_{cy}(t) &= -g \\ v_{cy}(t) &= -gt \\ y_c(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + h\,. \end{aligned}$$

On applique alors le critère (vectoriel) pour la rencontre des deux objets :

$$\exists\, t_r,\; \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_c(t_r)\,.$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} x_b(t_r) &= x_c(t_r) \\ v_{0x}t_r &= d\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned} y_b(t_r) &= y_c(t_r) \\ -\frac{1}{2}gt_r^2 + v_{0y}t_r &= -\frac{1}{2}gt_r^2 + h\,. \end{aligned}$$

Ainsi, l'instant t_r existe ssi

$$v_{0x}t_r = d \quad \text{et} \quad v_{0y}t_r = h$$

c'est-à-dire ssi

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{h}{d}\,,$$

ce qui est le cas, étant donné que la sarbacane est alignée sur la cible. La rencontre a donc lieu, indépendamment de la norme de la vitesse initiale $\vec{v}_0$!

Remarque : vectoriellement, le critère de rencontre donne directement

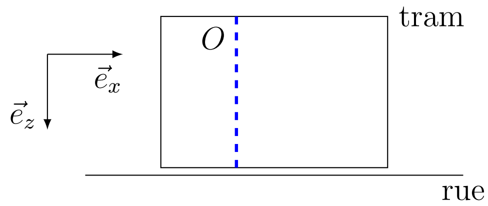
$$\vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_c(t_r) \;\Leftrightarrow\; \vec{v}_0 t_r = \vec{r}_0\,.$$

Comme la sarbacane vise initialement la cible, $\vec{v}_0$ et $\vec{r}_0$ sont parallèles et un tel t_r existe (sauf si $\vec{v}_0$ est nulle). La bille tirée en visant la cible touche toujours la cible !

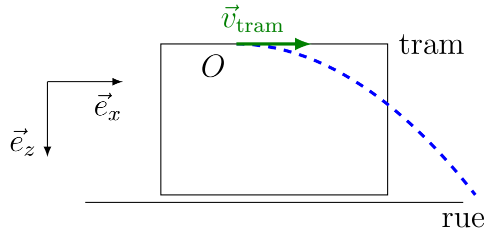
Exercice 4

On commence par visualiser et représenter les situations avant de choisir judicieusement un repère pour la description du mouvement de l'objet. On représente donc la rue, le tram et l'objet sur un ou plusieurs croquis réalisés avec soin, pour permettre un raisonnement correct et l'introduction des notations utilisées dans la suite :

- Par rapport au tram :



- Par rapport à la rue :



Sur la base des deux dessins ci-dessus, on caractérise la trajectoire de la bille, une fois par rapport au tram, une fois par rapport au sol.

Par rapport au tram, le mouvement de la bille est une chute libre (MUA). On connaît les équations horaires (vectorielles) pour l'accélération (constante), la vitesse (linéaire dans le temps) et la position (quadratique dans le temps). L'objet est en chute libre,

$$\vec{a}(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,,$$

et l'accélération est donc verticale à chaque instant.

Selon $\vec{e}_x$,

$$a_x(t) = 0 \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_z$,

$$a_z(t) = g \quad \forall\, t\,.$$

Fixons l'origine et l'instant $t = 0$ en début de chute.

Par rapport au tram, la vitesse initiale est nulle : $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = 0\,$. Alors

$$\vec{v}(t) = \vec{g}\, t \quad \forall\, t\,.$$

La vitesse est ainsi verticale à tout instant.

Selon $\vec{e}_x$,

$$v_x(t) = 0 \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_z$,

$$v_z(t) = g\, t \quad \forall\, t\,.$$

Après $t_1 = 0.2\,\mathrm{s}$,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = \vec{g}\, t_1$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_{1x} & = & 0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_{1z} & = & v_z(t_1) = g\, t_1 = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 0.2\,\mathrm{s} = 1.96\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \end{array} \right.$$

La norme de la vitesse vaut alors

$$||\vec{v}_1|| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2} = 1.96\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Par rapport à la rue, le mouvement de la bille est une chute libre (MUA). On connaît les équations horaires (vectorielles) pour l'accélération (constante), la vitesse (linéaire dans le temps) et la position (quadratique dans le temps). L'objet est en chute libre

$$\vec{a}(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,,$$

et l'accélération est donc verticale à chaque instant.
Selon $\vec{e}_x$,

$$a_x(t) = 0 \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_z$,

$$a_z(t) = g \quad \forall\, t\,.$$

Fixons l'origine et l'instant $t = 0$ en début de chute.
Par rapport à la rue, la vitesse initiale est celle du tram (par rapport au sol) : $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \vec{v}_{\mathrm{tram}}$. Alors,

$$\vec{v}(t) = \vec{g}\,t + \vec{v}_{\mathrm{tram}} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_x$,

$$v_x(t) = v_{\mathrm{tram}} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_z$,

$$v_z(t) = g\,t \quad \forall\, t\,.$$

Après $t_1 = 0.2\,\mathrm{s}$,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = \vec{g}\,t_1 + \vec{v}_{\mathrm{tram}}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_{1x} & = & v_{\mathrm{tram}} = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_{1z} & = & v_z(t_1) = g\,t_1 = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 0.2\,\mathrm{s} = 1.96\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \end{array} \right.$$

La norme de la vitesse vaut alors

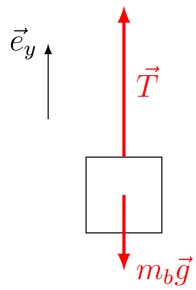
$$||\vec{v}_1|| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2} = 5.37\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Exercice 5

On cherche une explication en faisant appel aux lois de la dynamique (lois de Newton) appliquées au train et à une personne à l'intérieur du train.
Le train fait un virage. En effet, les voies exercent une force sur le train lui imposant une courbure de trajectoire. Une personne qui est dans le train ne subit pas cette force et continue à se déplacer en ligne droite. Vous vous retrouvez ainsi projeté contre la paroi latérale (la paroi est projetée contre vous).

Exercice 6

On commence par visualiser et représenter la situation grâce à un dessin soigné. On choisit ensuite, judicieusement, un repère pour la description du mouvement du bloc.
Notons m_b la masse du bloc et $\vec{a}_b$ son accélération.



Objet : le bloc

Forces : poids, tension

Newton :

$$m_b\vec{g} + \vec{T} = m_b\vec{a}_b\,.$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$-m_b g + T = m_b a_b\,.$$

Remarque : en absence d'ambiguïté, il n'est pas nécessaire de noter l'indice y dans la composante de l'accélération.
L'accélération étant connue, on détermine la force exercée par le câble. La deuxième loi de Newton pour le bloc fournit

$$T = m_b a_b + m_b g = m_b(g + a_b)\,.$$

L'accélération étant de même sens que $\vec{e}_y$, sa composante est positive :

$$a_b = +1\,\mathrm{m\,s^{-2}} > 0\,.$$

Ainsi,

$$T = m_b(g + a_b) = 500\,\mathrm{kg} \cdot (9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} + 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}) = 5405\,\mathrm{N}\,.$$

Après la phase d'accélération, la vitesse est constante et l'accélération est donc nulle. La deuxième loi de Newton pour le bloc donne alors

$$T = m_b g = 500\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 4905\,\mathrm{N}\,.$$

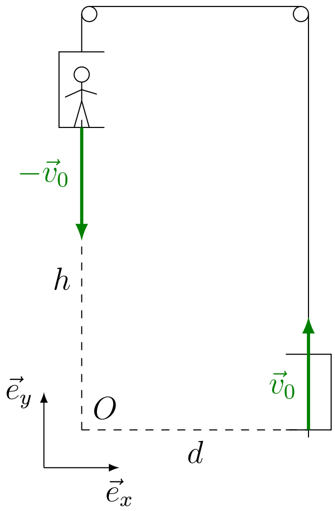
Exercice 7

On commence par visualiser et représenter la situation grâce à un dessin soigné. On choisit ensuite, judicieusement, un repère pour la description des mouvements. Pour appliquer le critère de rencontre, il convient de déterminer la position des objets à chaque instant.
Plaçons l'origine O au sol, sous la première cage d'ascenseur et notons $\vec{r}_1$ la position de la cage d'ascenseur de gauche, $\vec{r}_2$ celle de la cage d'ascenseur de droite et $\vec{r}_c$ celle du cascadeur.
Le critère de rencontre entre le cascadeur et la cage 2 s'écrit :

$$\exists\, t_r \text{ t.q. } \vec{r}_c(t_r) = \vec{r}_2(t_r)\,.$$

Il convient donc de décrire la position des cages 1 et 2 et celle du cascadeur à chaque instant.

Appelons $\vec{v}_0$ la vitesse, ascendante, de la seconde cage d'ascenseur.



Avec le repère choisi, la position initiale de la première cage est donnée par

$$\vec{r}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

et celle de la seconde par

$$\vec{r}_{02} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Les mouvements du cascadeur avant et après le saut sont différents. En appelant t_s l'instant du saut, on peut distinguer la situation…

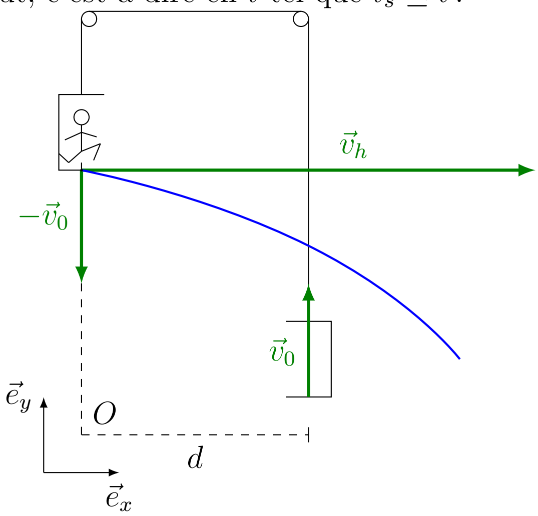
- …avant le saut, c'est-à-dire en t tel que $0 < t \leq t_s$.
  Le cascadeur se trouve dans la cage 1,

  $$\vec{r}_c(t) = \vec{r}_1(t) = -\vec{v}_0\, t + \vec{r}_{01} .$$

  Selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$,

  $$x_c(t) = 0 \quad \text{et} \quad y_c(t) = -v_0 t + h .$$

- …de celle après le saut, c'est-à-dire en t tel que $t_s \leq t$.



  Le cascadeur est en MUA, sa chute libre commençant à l'instant t_s telle que

  $$\begin{aligned} \vec{a}_c(t) &= \vec{g} \\ \vec{v}_c(t) &= \vec{g} \cdot (t - t_s) + \vec{v}_c(t_s) \\ \vec{r}_c(t) &= \frac{1}{2}\vec{g} \cdot (t - t_s)^2 + \vec{v}_c(t_s) \cdot (t - t_s) + \vec{r}_c(t_s) . \end{aligned}$$

avec les conditions initiales (fin du MRU avec la cage 1)

$$\vec{r}_c(t_s) = -\vec{v}_0\, t_s + \vec{r}_{01} \quad \text{et} \quad \vec{v}_c(t_s) = -\vec{v}_0 + \vec{v}_h\,.$$

Selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$,

$$x_c(t) = v_h(t-t_s) \;\text{ et }\; y_c(t) = -\frac{1}{2}g(t-t_s)^2 - v_0(t-t_s) - v_0 t_s + h = -\frac{1}{2}g(t-t_s)^2 - v_0 t + h\,.$$

La cage de droite est en MRU et son mouvement est donné par

$$\vec{r}_2(t) = \vec{v}_0\, t + \vec{r}_{02}\,.$$

Selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$,

$$x_2(t) = d \quad \text{et} \quad y_2(t) = v_0 t\,.$$

On applique alors le critère (vectoriel) pour la rencontre des deux objets :

$$\exists\, t_r,\; \vec{r}_c(t_r) = \vec{r}_2(t_r)\,.$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} x_c(t_r) &= x_2(t_r) \\ v_h(t_r - t_s) &= d\,. \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned} y_c(t_r) &= y_2(t_r) \\ -\frac{1}{2}g(t_r - t_s)^2 - v_0 t_r + h &= v_0 t_r\,. \end{aligned}$$

Il faut déterminer t_s pour que la rencontre ait lieu (c'est-à-dire pour que l'instant t_r existe). On cherche donc à résoudre le système

$$\left\{ \begin{aligned} v_h(t_r - t_s) &= d \\ -\tfrac{1}{2}g(t_r - t_s)^2 - v_0 t_r + h &= v_0 t_r \end{aligned} \right.$$

en t_s et t_r .
En utilisant la première équation sous la forme

$$t_r - t_s = \frac{d}{v_h}$$

dans la seconde, il vient

$$-\frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_h^2} + h = 2v_0 t_r \quad \Rightarrow \quad t_r = \frac{1}{2v_0}\left(h - \frac{gd^2}{2v_h^2}\right)\,.$$

On en déduit l'instant du saut :

$$t_s = t_r - \frac{d}{v_h} = \frac{1}{2v_0}\left(h - \frac{gd^2}{2v_h^2}\right) - \frac{d}{v_h}\,.$$