

Physique

Semestre d'automne 2024

Roger Sauser
Guido Burmeister

<https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14848>

Corrigé 2

Exercice 1

On décompose le vecteur position $\vec{r}_i$ selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\vec{r}_i = (\vec{r}_i)_x \vec{e}_x + (\vec{r}_i)_y \vec{e}_y .$$

- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_1$
selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_1)_x = +1 \text{ cm}$
selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_1)_y = +2 \text{ cm}$.
- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_2$
selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_2)_x = -2 \text{ cm}$
selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_2)_y = +1 \text{ cm}$.
- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_3$
selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_3)_x = +0.5 \text{ cm}$
selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_3)_y = -1 \text{ cm}$.

Exercice 2

On décompose le vecteur position $\vec{r}_i$ selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

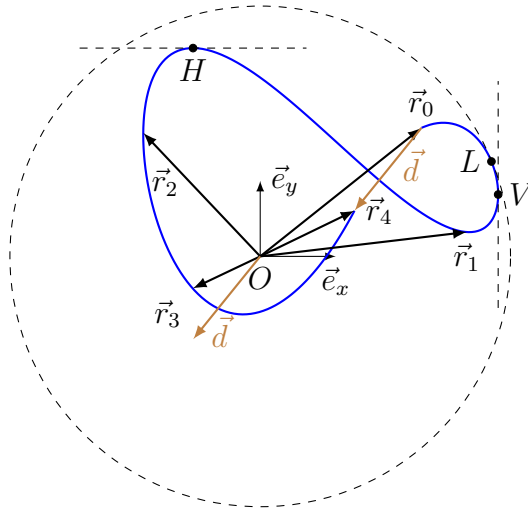
$$\vec{r}_i = (\vec{r}_i)_x \vec{e}_x + (\vec{r}_i)_y \vec{e}_y .$$

- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_1$
selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_1)_x = 0 \text{ cm}$
selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_1)_y = -1.5 \text{ cm}$.
- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_2$
selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_2)_x = -2 \text{ cm}$
selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_2)_y = 0 \text{ cm}$.
- Décomposition du vecteur position $\vec{r}_3$
selon $\vec{e}_x$: $(\vec{r}_3)_x = +||\vec{r}_3|| \sin \alpha = +1 \text{ cm}$
selon $\vec{e}_y$: $(\vec{r}_3)_y = +||\vec{r}_3|| \cos \alpha = +\sqrt{3} \text{ cm}$.

Exercice 3

Le vecteur position est un vecteur allant de l'origine O à l'objet. Il fournit donc la position de l'objet dans le référentiel. On obtient les vecteurs position cherchés en observant les positions possibles de l'objet (c'est-à-dire la trajectoire de ce dernier).

Sur la figure ci-dessous, les vecteurs position ont été représentés pour les cinq instants $t_0 = 0 \text{ s}$, $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 2.5 \text{ s}$, $t_3 = 3 \text{ s}$ et $t_4 = 4 \text{ s}$. Le **vecteur déplacement total** $\vec{d} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0$ est également donné.



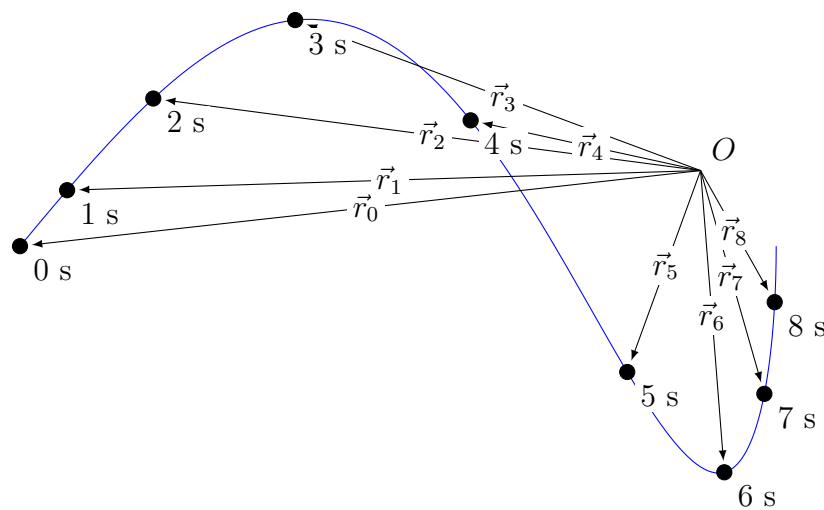
La position sur la trajectoire la plus éloignée de O est le point $L(3.06 \text{ cm}, 1.25 \text{ cm})$.

La position sur la trajectoire la plus éloignée de O selon $\vec{e}_x$ est le point $V(3.15 \text{ cm}, 0.82 \text{ cm})$.

La position sur la trajectoire la plus éloignée de O selon $\vec{e}_y$ est le point $H(-0.89 \text{ cm}, 2.75 \text{ cm})$.

Exercice 4

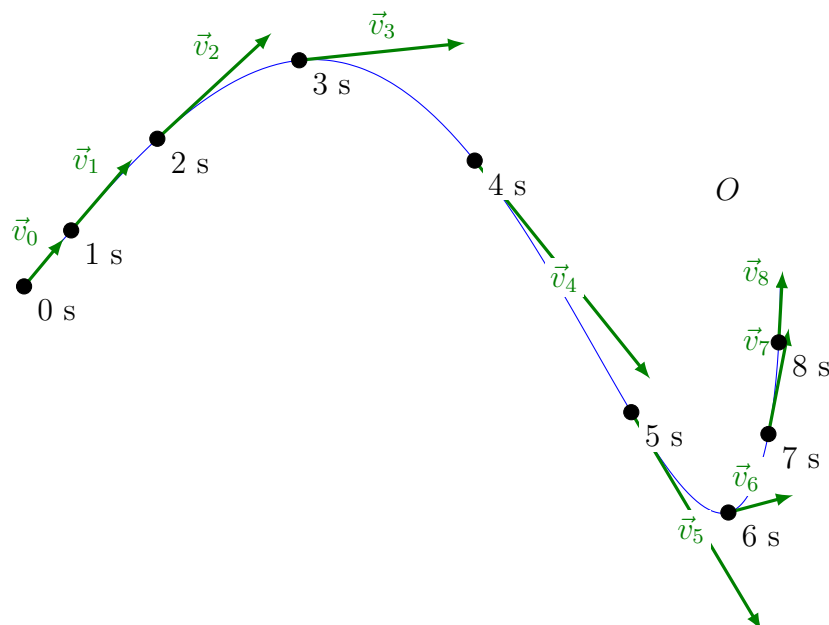
On choisit une origine à partir de laquelle on donne les vecteurs position.



Pour représenter approximativement les vecteurs vitesse, il convient d'imaginer le mouvement de l'objet.

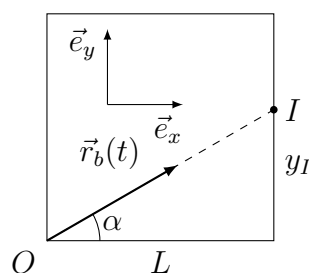
La vitesse (grandeur vectorielle) est le changement de position par rapport au temps : elle est tangente à la trajectoire, donne le sens du mouvement et la distance parcourue par unité de temps.

On peut comparer les normes des différents vecteurs vitesse en se basant sur les distances parcourues en 1 seconde par l'objet. On en déduit par exemple que la norme de la vitesse est plus grande à l'instant $t = 4 \text{ s}$ qu'à l'instant $t = 6 \text{ s}$.



Exercice 5

Sur un dessin muni d'un repère, on esquisse la trajectoire de la bille : le mouvement de la bille est rectiligne et uniforme (MRU).



Le point I où la bille quitte la table est aisément décrit par rapport à une origine O au point de départ de la bille et avec un repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ parallèle aux bords de la table :

$$I = (L, y_I) .$$

La composante y_I est donnée par la trigonométrie :

$$\tan \alpha = \frac{y_I}{L} \implies y_I = L \tan \alpha = \frac{L}{\sqrt{3}} .$$

Approche plus générale

La connaissance de la position (vectorielle!) de la bille à chaque instant $\vec{r}_b(t)$ permet de résoudre toutes les questions relatives à sa cinématique.

En choisissant l'instant de départ $t_0 = 0$, l'horaire est donné par

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0 t .$$

En projetant cette équation vectorielle selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} x_b(t) &= v_{0x} t = v_0 \cos \alpha t , \\ y_b(t) &= v_{0y} t = v_0 \sin \alpha t . \end{aligned}$$

Dans cette description, le temps de séjour t_s est égal à l'instant où la bille quitte la table au point I :

$$\vec{r}_b(t_s) = \vec{OI}.$$

En projetant cette équation vectorielle selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} x_b(t_s) &= v_0 \cos \alpha t_s = L, \\ y_b(t_s) &= v_0 \sin \alpha t_s = y_I. \end{aligned}$$

La première de ces équations donne le temps nécessaire à la bille pour parcourir une distance L (selon $\vec{e}_x$) :

$$t_s = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2L}{v_0 \sqrt{3}}.$$

La seconde équation permet alors de déterminer y_I . Plus simplement encore, le quotient membre à membre des deux équations permet d'éliminer t_s :

$$\frac{y_b(t_s)}{x_b(t_s)} = \frac{v_0 \sin \alpha t_s}{v_0 \cos \alpha t_s} = \tan \alpha = \frac{y_I}{L} \implies y_I = L \tan \alpha = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

Remarque : si la trajectoire et le sens du mouvement sont connus, la connaissance de la distance parcourue à chaque instant permet de résoudre certains problèmes de cinématique. Notons $s_b(t)$ cette distance :

$$s_b(t) = v_0 t.$$

Exploiter le critère caractérisant le temps de séjour de la bille sur la table.

Dans cette description, le temps de séjour t_s est égal à l'instant où la bille quitte la table au point I :

$$s_b(t_s) = \|\vec{OI}\|,$$

la distance entre O et I étant donnée par le théorème de Pythagore.

Alors

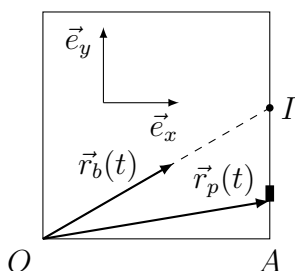
$$s_b(t_s) = v_0 t_s = \sqrt{L^2 + y_I^2} = L \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2L}{\sqrt{3}} \implies t_s = \frac{2L}{v_0 \sqrt{3}}.$$

Cette méthode est certes tout à fait valable. Cependant, elle n'est de loin pas aussi générale que la première méthode proposée.

Exercice 6

Le problème pose la question d'une rencontre éventuelle entre la bille et la paroi mobile : se trouvent-elles au même endroit à un instant donné ?

Notons $\vec{r}_b(t)$ et $\vec{r}_p(t)$ les positions respectives de la bille et de la paroi mobile à l'instant t par rapport à l'origine choisie en O .



Il y a rencontre entre ces deux objets ssi

$$\exists t_r \text{ t.q. } \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r),$$

c'est-à-dire ssi il existe un instant t_r auquel les positions (vectorielles !) coïncident.

Donnons l'équation horaire de la bille $\vec{r}_b(t)$ d'une part et celle de la paroi mobile $\vec{r}_p(t)$ d'autre part (par rapport à la même origine).

La bille est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0 t .$$

La paroi mobile est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_p$ et part de A à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p t + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le critère de rencontre devient

$$\begin{aligned} \vec{r}_b(t_r) &= \vec{r}_p(t_r) \\ \vec{v}_0 t_r &= \vec{v}_p t_r + \vec{r}_{p0} . \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos \alpha t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin \alpha t_r = v_0 t_r .$$

La seconde équation impose que $\sin \alpha = 1$ pour $t_r \neq 0$, ce qui est faux.

Un tel temps de rencontre n'existe donc pas.

Modifions alors l'instant de départ t_{p0} de la paroi pour que la rencontre ait lieu : la bille et la paroi mobile doivent se trouver au même endroit à un instant donné.

La bille est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0 t .$$

La paroi mobile est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_p$ et part de A à l'instant t_{p0} :

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p (t - t_{p0}) + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le critère de rencontre devient

$$\begin{aligned} \vec{r}_b(t_r) &= \vec{r}_p(t_r) \\ \vec{v}_0 t_r &= \vec{v}_p (t_r - t_{p0}) + \vec{r}_{p0} . \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos \alpha t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin \alpha t_r = v_0 (t_r - t_{p0}) .$$

La rencontre doit avoir lieu dans les deux composantes ! Autrement dit, l'instant de départ t_{p0} de la paroi doit être tel que t_r vérifie les deux équations simultanément.

La première équation donne

$$t_r = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2L}{v_0 \sqrt{3}} .$$

La seconde équation donne finalement

$$t_{p0} = (1 - \sin \alpha) t_r = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{2L}{v_0 \sqrt{3}} = \frac{L}{v_0 \sqrt{3}}.$$

Exercice 7

Reprendre les définitions, intuitives et exactes, des vecteurs position, vitesse et accélération. Le vecteur position (grandeur vectorielle) indique la position de l'objet à partir de l'origine choisie.

La vitesse (grandeur vectorielle) donne le sens du mouvement et indique le taux de variation de la position par rapport au temps. Elle est tangente à la trajectoire.

L'accélération (grandeur vectorielle) donne le taux de variation de la vitesse par rapport au temps. Elle est ainsi toujours dirigée vers l'intérieur du virage.

Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{a}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas réalistes :

- La vitesse $\vec{v}$ doit être tangente à la trajectoire ;
- l'accélération $\vec{a}_1$ doit être dirigée vers l'intérieur du virage ;
- la vitesse $\vec{v}_2$ doit être tangente à la trajectoire.

Exercice 8

Imaginer le mouvement de l'objet.

Se rappeler la définition intuitive de l'accélération (grandeur vectorielle) : elle indique le taux de variation de la vitesse par rapport au temps (et est ainsi toujours dirigée vers l'intérieur du virage).

Les changements dans la norme de la vitesse permettent alors d'approximer la composante de l'accélération tangente à la trajectoire. On obtient ainsi par exemple que l'accélération tangentielle doit être dirigée vers l'arrière à l'instant $t = 5$ s. La composante de l'accélération normale à la trajectoire est absente (lorsque l'objet se déplace en ligne droite) ou dirigée vers l'intérieur du virage.

