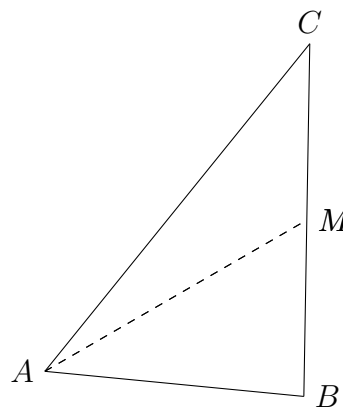


Centre de masse d'une plaque homogène triangulaire

On considère une fine plaque homogène de la forme d'un triangle ABC .

Montrer que le centre de masse de la plaque se trouve sur la médiane AM issue de A .

On en conclura que le centre de masse se trouve à l'intersection des médianes du triangle.



Rappel

Par définition, le centre de masse est la moyenne des positions, pondérée par les masses. Le centre de masse G d'un objet formé de N points matériels de masse m_i et de position $\vec{r}_i$ est

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} (m_1 \vec{r}_1 + \cdots + m_N \vec{r}_N) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i,$$

où $m = \sum_{i=1}^N m_i$ (masse de l'objet).

Pour un objet « continu », la définition est similaire :

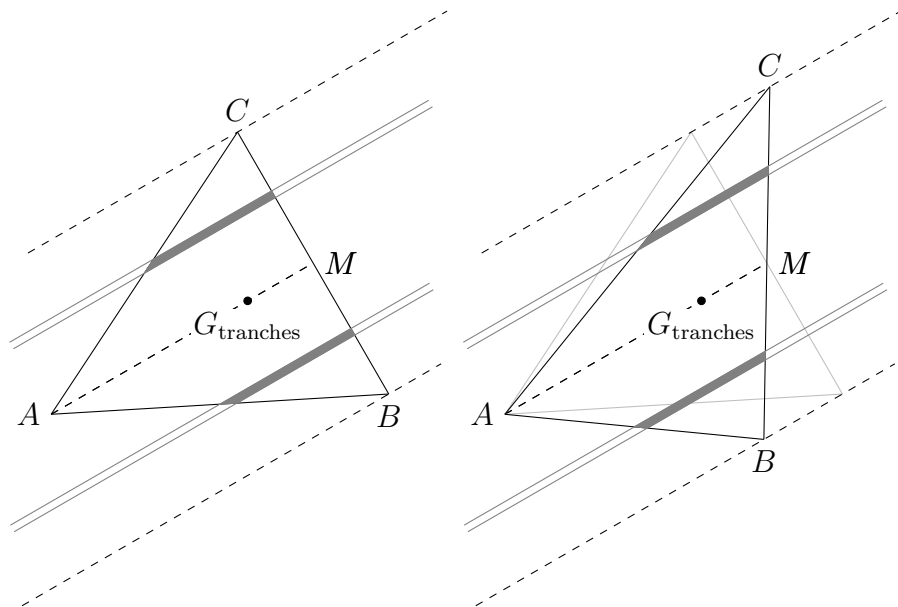
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{\text{objet}} dm \vec{r},$$

où $m = \int_{\text{objet}} dm$ (masse de l'objet).

Triangle homogène

Considérons dans un premier temps un triangle isocèle en A ($BC \perp AM$). Dans un deuxième temps, en gardant M fixe, nous déplacerons B (ou C) parallèlement à AM .

- Triangle isocèle. Il est clair par symétrie que le centre de masse se trouve sur la médiane AM , qui est aussi la bissectrice de l'angle en A : tout morceau de la plaque a son symétrique par rapport à AM .
- Triangle quelconque. On peut considérer deux fines tranches du triangle isocèle, parallèles à AM et symétriques par rapport à AM : leur centre de masse G_{tranches} se trouve sur AM . En déformant le triangle comme indiqué, la taille des tranches ne change pas (théorème de Thalès), ni leur distance à AM : le centre de masse reste sur AM (en fait, il ne se déplace pas).



En considérant le triangle quelconque formé de toutes ces tranches, son centre de masse se trouve donc sur la médiane AM . Cela traduit le fait que le triangle, posé sur une médiane, est en équilibre, ou encore que la médiane AM , lorsque le triangle est suspendu par le sommet A , est verticale.