Accélérations tangentielle et normale

L'accélération $\vec{a}$ peut être décomposée selon la tangente et selon la normale à la trajectoire :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n\,.$$

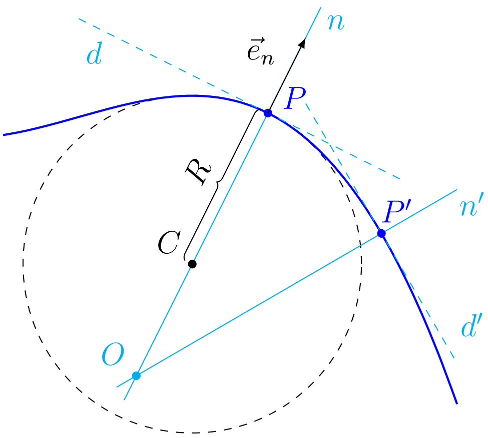
Les relations $a_t = \dot{v}$ et $|a_n| = \frac{v^2}{R}$ se montrent à l'aide du produit scalaire et de la variation par rapport au temps d'un produit,

$$\frac{d(AB)}{dt} = \dot{A}B + A\dot{B}\,.$$

En effet, la vitesse étant $\vec{v} = v\vec{e}_t$, l'accélération s'écrit comme $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t$. Comme $||\vec{e}_t||^2 = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1$, la variation est nulle : $\frac{d}{dt}(||\vec{e}_t||^2) = 2\,\vec{e}_t \cdot \dot{\vec{e}}_t = 0$. La variation $\dot{\vec{e}}_t$ est donc soit nulle, soit normale à $\vec{e}_t$. Ainsi

$$\vec{a}_t = \dot{v}\vec{e}_t \qquad \vec{a}_n = v\dot{\vec{e}}_t\,.$$

Pour démontrer la relation sur l'accélération normale, considérons un objet sur sa trajectoire à deux instants proches t et $t' = t + \Delta t$:



- à t : position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, tangente d, normale n, vitesse $\vec{v}$.
  Le cercle osculateur est de centre C et de rayon R.
- à t' : position $\vec{r}\,' = \overrightarrow{OP'}$, tangente d', normale n', vitesse $\vec{v}\,'$.

L'intersection des normales définit l'origine O de sorte que

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{v}\,' \cdot \vec{r}\,' = 0\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r} &= \vec{r}\,' - \vec{r} \\
\vec{v} \cdot \Delta\vec{r} &= \vec{v} \cdot \vec{r}\,' - \vec{v} \cdot \vec{r} - \vec{v}\,' \cdot \vec{r}\,' = -\Delta\vec{v} \cdot \vec{r}\,' \\
\vec{v} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= -\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \cdot \vec{r}\,'\,.
\end{aligned}$$

Dans la limite $\Delta t \to 0$, nous obtenons (un déplacement $\Delta\vec{r}$ étant indépendant de l'origine)

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \to \vec{v} \qquad \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to \vec{a} \qquad \vec{r}\,' \to \vec{r} \qquad O \to C \qquad \vec{r} \to R\vec{e}_n$$

et finalement

$$v^2 = -\,\vec{a} \cdot R\vec{e}_n = -a_nR \Longrightarrow |a_n| = \frac{v^2}{R}\,.$$