

Série 4

Exercice 1. Sur une feuille de papier, tracer une droite d puis placer dessus trois points A, B et C tels que :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 2 \text{ et } \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Dans chacun des cas suivants décrire la droite définie par l'équation normale donnée. La représenter précisément sur la feuille.

a. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

b. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 12$

c. $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = -4.$

Exercice 2. On donne un triangle ABC vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 3, \|\overrightarrow{AC}\| = 4\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Déterminer une équation normale de chacune des droites ci-dessous, vue depuis A .

a. la hauteur issue de A

b. la hauteur issue de C

c. la médiatrice de BC .

Exercice 3. On donne un triangle ABC et une droite d vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{7}, \|\overrightarrow{AC}\| = 2, \|\overrightarrow{BC}\| = 3 \text{ et } d : \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2.$$

- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ainsi que le projeté orthogonal $p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC})$ de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$.
- Tracer précisément la droite d sur un dessin.
- On note I l'intersection de d avec la droite (BC) . Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Déterminer une équation vectorielle de d vue depuis A , en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4. Sur une feuille de papier, dessiner un rectangle $ABCD$ et la droite d vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 3, \|\overrightarrow{AD}\| = 1 \text{ et } d : \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Tracer aussi la médiatrice g de la diagonale AC .

- Ecrire une équation normale de d vue depuis B . Quelle est la distance de B à d ?
- Déterminer une équation normale de g vue depuis B .
- On note I le point d'intersection de d et g . Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 5. On donne un triangle non aplati ABC dans le plan.

- Ecrire des équations normales des trois hauteurs du triangle, vues depuis A .
- Montrer que ces trois hauteurs s'intersectent en un point. *Indication : introduire l'intersection de deux d'entre elles.*
- En procédant de la même façon, montrer que les trois médiatrices s'intersectent en un point.

Exercice 6. On donne un triangle non aplati ABC dans le plan, et on note :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = c, \|\overrightarrow{AC}\| = b \text{ et } \widehat{BAC} = \theta.$$

Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, où O est le centre du cercle circonscrit à ABC .

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. perpendiculaire à d passant par A , b. même qu'au a., c. médiatrice de BC .

Ex. 2 : a. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, b. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$, c. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{23}{2}$.

Ex. 3 : a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$, $p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$, c. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Ex. 4 : a. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BD} = 9$, $\frac{9}{\sqrt{10}}$, b. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$, c. $\overrightarrow{BI} = \frac{13}{18}\overrightarrow{BA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$.

Ex. 6 : $\overrightarrow{AO} = \frac{c-b\cos\theta}{2c\sin^2\theta}\overrightarrow{AB} + \frac{b-c\cos\theta}{2b\sin^2\theta}\overrightarrow{AC}$.