Série 3

Exercice 1. Sur une feuille de papier, placer trois points non-alignés A, B et C. Dans chacun des cas suivants, quel est lieu décrit par l'équation vectorielle donnée ? Le représenter précisément sur la feuille.

a. $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$ b. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}, t \in \mathbb{R}$ c. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Dessiner une droite d sur laquelle se trouvent trois points A, B, C vérifiant :

$$\overrightarrow{BC} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\,.$$

a. Quelle est l'abscisse de B dans le repère $(C, \overrightarrow{AC})$ de d ?
b. Dans un repère de d d'origine A on sait que B a pour abscisse 3. Quelle est l'abscisse de C ?
c. Placer sur d un repère dans lequel A et B ont pour abscisses respectives 1 et 4.

Exercice 3. Sur une feuille de papier, dessiner un parallélogramme $ABCD$. On donne aussi :

$$d : \overrightarrow{AM} = (2-t)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}t\overrightarrow{DC}\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

a. Où se trouve le point M lorsque $t = 2$? Et lorsque $t = 1$?
b. Montrer que d est une droite et en donner un vecteur directeur. Tracer d sur le dessin.
c. On note I le point d'intersection de d et (AC). Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4. On donne un triangle ABC vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 6 \ \text{ et } \ \|\overrightarrow{AC}\| = 3\,.$$

On note d la bissectrice en A et I le point sur AB d'abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

a. Ecrire une équation vectorielle de la droite d vue depuis A.
b. Calculer le vecteur $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c. Ecrire une équation vectorielle de la droite (CI), vue depuis A, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
d. On note J le point d'intersection de d et (CI). Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

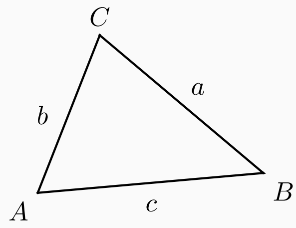
Exercice 5. On donne un triangle ABC non-aplati dont on note I, J, K les milieux respectifs des côtés BC, AC, AB.

a. Ecrire des équations vectorielles des médianes (BJ) et (CK), vues depuis le point A, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. On note G le point d'intersection de (BJ) et (CK). Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c. Montrer que G se trouve aussi sur la médiane (AI) issue de A. *Indication : comparer* $\overrightarrow{AG}$ *et* $\overrightarrow{AI}$.
d. Prouver l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}\,.$$

Exercice 6.

On donne un triangle ABC dont on note a, b, c les longueurs des côtés comme ci-contre.



a. Ecrire des équations vectorielles des trois bissectrices de ABC.

b. Montrer qu'elles s'intersectent en un point I dont on donnera les coordonnées.

c. Prouver l'égalité vectorielle suivante :

$$a\,\overrightarrow{AI} + b\,\overrightarrow{BI} + c\,\overrightarrow{CI} = \vec{0}.$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. (AB), b. parallèle à (AC) passant par B, c. (AD), où $ABDC$ est un parallélogramme.
Ex. 2 : a. $-\frac{2}{5}$, b. 5.
Ex. 3 : a. B, milieu de CD, c. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Ex. 4 : b. $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, d. $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.
Ex. 5 : b. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.