

## Série 2

**Exercice 1.** Sachant que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  mesurent respectivement 3 et 5 et forment entre eux un angle de  $60^\circ$  :

- Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  puis déterminer le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur  $\vec{v}$ .
- Quelle est la norme du vecteur  $2\vec{u} + \vec{v}$ ? *Indication : calculer le carré de cette norme.*
- Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  de sorte à ce que le vecteur  $\vec{u} + \alpha\vec{v}$  soit orthogonal à  $\vec{u}$ .

**Exercice 2.** Sur une feuille de papier, dessiner deux vecteurs non colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Dans chacun des cas suivants, représenter sur votre dessin les vecteurs  $\vec{w}$  du plan vérifiant la condition donnée. Justifier votre construction.

- $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ .
- $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 3\vec{u} \cdot \vec{w}$ . *Indication : se ramener à un produit scalaire nul.*
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ . *Indication : interpréter la condition en terme de projection orthogonale.*

**Exercice 3.** Dans le plan, on donne deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{5}, \quad 2\vec{u} + \vec{v} \text{ et } 11\vec{u} - 7\vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

- Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et en déduire l'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
- Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  de sorte à ce que la projection orthogonale de  $\vec{u} + \alpha\vec{v}$  sur  $\vec{u}$  soit de norme 2.
- Existe-t-il un vecteur  $\vec{w}$  tel que  $\vec{w} \cdot \vec{u} = 1$  et  $\vec{w} \cdot \vec{v} = 3$ ? Si oui, décrire ce vecteur en fonction de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Exercice 4.** Dans un parallélogramme  $ABCD$ , les côtés  $AB$  et  $AD$  mesurent 6 et  $\sqrt{13}$  et la diagonale  $AC$  mesure 5.

- Combien mesure l'autre diagonale?
- Quel est le lieu des points  $M$  tels que  $\vec{AC} \cdot \vec{CM} = 0$ ?
- Calculer  $\vec{DA} \cdot \vec{DB}$ . Quel est le lieu des points  $M$  tels que  $\vec{DB} \cdot \vec{DM} = 25$ ?

**Exercice 5.** Dans le plan, on donne deux points  $A$  et  $B$  distants de  $\delta > 0$ .

- En faisant intervenir le milieu du segment  $AB$ , montrer que, pour tout point  $M$  du plan, on a :

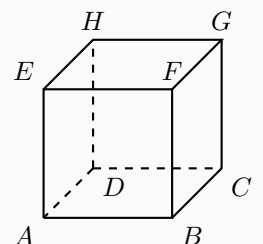
$$\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 \geq \frac{1}{2}\delta^2 \quad \text{et} \quad \vec{MA} \cdot \vec{MB} \geq -\frac{1}{4}\delta^2.$$

- Montrer que le lieu des points  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  est un cercle. En donner le centre et le rayon.
- Plus généralement, quel est le lieu des points  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$  est une constante fixée?

**Exercice 6.**

La figure ci-contre représente un cube de côté 2.

- Quels sont les points  $M$  de l'espace qui vérifient  $\vec{HG} \cdot \vec{CM} = 0$ ?
- Calculer le produit scalaire  $\vec{AC} \cdot \vec{EB}$ .
- Sachant que  $M$  appartient au plan  $(BDF)$ , calculer  $\vec{AC} \cdot \vec{EM}$ . *Indication : que peut-on dire des vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{BM}$ ?*



---

*Éléments de réponse :*

**Ex. 1 :** a.  $\frac{15}{2}, \frac{3}{10}\vec{v}$  b.  $\sqrt{91}$ , c.  $\alpha = -\frac{6}{5}$ .

**Ex. 3 :** a.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3, \theta \simeq 18,4^\circ$ .

**Ex. 4 :** a.  $\sqrt{73}$ .

**Ex. 5 :** b. centre  $I$ , rayon  $\frac{1}{2}\delta$ , c. c'est l'ensemble vide ou un cercle.

**Ex. 6 :** b. 4, c.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EM} = 4$ .