

Série 4

1. Calculer sans machine les valeurs suivantes :

a) $\cos(\frac{7\pi}{12})$

c) $\tan(\frac{5\pi}{12})$

b) $\sin(\frac{\pi}{12})$

d) $\tan(\frac{\pi}{8})$

2. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $2x$ dans les deux cas suivants :

a) $\sin x = \pm\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

b) $\cot x = \pm 2\sqrt{2}$, $3\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$

3. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $\frac{x}{2}$ dans les deux cas suivants :

a) $\cos x = \pm\frac{3}{5}$, $-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi$

b) $\tan x = -\frac{4}{3}$, $\frac{7\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2}$

4. Si $\tan x = \frac{1}{3}$ et $\tan y = -\frac{1}{7}$, calculer sans machine, l'angle $\varphi = 2x - y$

a) sachant que x et y sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

b) sachant que x et y sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

5. Calculer sans calculatrice la valeur de $\tan(x+y)$ sachant que $\tan x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que y est défini par $\sin y = \cos(\frac{y}{3})$ avec $\frac{19\pi}{4} \leq y \leq 5\pi$.

6. Factoriser les expressions suivantes :

a) $\sin(5x) - \sin x$

b) $\cos^2(3x) - \cos^2 x$

7. Factoriser avant de résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(3x) + \sin x = \sin(2x)$

c) $\sin^2(5x) = \sin^2 x$

b) $\cos(3x) + \cos(5x) = \cos x$

d) $(1 + \tan x) [\cos(7x) + \cos x] = 0$

8. Démontrer l'identité suivante : $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

9. Exercice récréatif

Calculer la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. En déduire la construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique.

Indication : chercher une équation polynomiale satisfaite par $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Réponses de la série 4

1. a) $\cos(\frac{7\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ c) $\tan(\frac{5\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$
 b) $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ d) $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$

2. a) $\sin(2x) = -\frac{24}{25}$, $\cos(2x) = \frac{7}{25}$. b) $\sin(2x) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos(2x) = \frac{7}{9}$.

3. a) $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. b) $\sin(\frac{x}{2}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ b) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$

5. $\tan(x + y) = \sqrt{2} - 3$

6. a) $\sin(5x) - \sin x = 2 \sin(2x) \cos(3x)$
 b) $\cos^2(3x) - \cos^2 x = -4 \sin x \cos x \sin(2x) \cos(2x) = -\sin(2x) \sin(4x)$

7. a) $S = \left\{ \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 b) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 c) $S = \left\{ \frac{k\pi}{6}, \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 d) $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$