

Série 12

1. Calculer sans machine les quantités suivantes :

a) $A = \log_2 \frac{1}{16}$

c) $C = \log_\pi 1$

e) $E = \log(\log 10^{10})$

b) $B = \log_4 2$

d) $D = \log_{1/2} 8$

f) $F = e^{2 \ln 5}$

2. Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une seule fonction logarithme ou exponentielle :

a) $A = \log 15 - \log 6 + 3 \log 2$

b) $B = \sqrt{e^9} \cdot e^{2-\ln 3} \cdot e^{-3/2}$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x/2} - e^{-3x/2} = \frac{1}{2} (e^{x/2} + 5 e^{-x/2})$

b) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2 (1 + e^{-\sin x})$

c) $3 + \log_2 \left(\frac{1}{2} - x \right) = \log_2 \left(\frac{x-9}{x+1} \right)$

d) $\log_{1/2} \left(2x - 13 - \frac{15}{x} \right) - \frac{1}{2} = \log_{1/2} [2(x-15)] + \frac{1}{2}$

4. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(2x - e^{-\ln x}) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2$

b) $3^{x+4} - 1458 \leq 9^x$

d) $\ln(x^2 \sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x - 48)$

(Astuce : $27 + 54 = 81, 27 \cdot 54 = 1458$)

5. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\log_a \frac{x-4}{x-6} \leq -1 + \log_a(2x) - 2 \log_a |x-6|$

i) avec $a = 2$,

ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

b) $\log_a(4-x) + a \leq a \cdot \log_a(x+2) - 1$

i) avec $a = 2$,

ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

6. Déterminer, là où elles existent, les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \tan(a^x),$

d) $d(x) = \arcsin(e^x),$

b) $b(x) = e^{1/\ln x},$

e) $e(x) = x \cdot \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}).$

c) $c(x) = \ln(\ln x),$

Réponses de la série 12

1. a) $A = -4$ c) $C = 0$ e) $E = 1$
b) $B = \frac{1}{2}$ d) $D = -3$ f) $F = 25$
2. a) $A = 1 + \log 2$ b) $B = \frac{1}{3} e^5$
3. a) $S = \{\ln 2\}$ c) $S = \{-\frac{13}{8}\}$
b) $S = \emptyset$ d) $S = \emptyset$
4. a) $S = \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{1+e^2}{2}} \right[$ c) $S =] - 3, 6]$
b) $S =] - \infty, 3] \cup [3 + \log_3 2, +\infty[$ d) $S =] 3, 4[\cup] 12, +\infty[$
5. a) i) $S = [3, 4[\cup] 6, 8]$ ii) $S =] 0, 2] \cup [12, +\infty[$
b) i) $S = [2, 4[$ ii) $S =] - 2, 0]$
6. a) $a'(x) = a^x \ln a [1 + \tan^2(a^x)]$, d) $d'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$,
b) $b'(x) = -\frac{e^{1/\ln x}}{x \ln^2 x}$, e) $e'(x) = \sqrt{2} \sin \ln x$.
c) $c'(x) = \frac{1}{x \ln x}$,
-