

Série 10 bis

1. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \cos\left(\frac{1+2x}{x}\right)$

d) $d(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

b) $b(x) = \cos^2(\sin x)$

e) $e(x) = \arccos(3x - 1)$

c) $c(x) = [\sin(px^q)]^r, \quad p, q, r \in \mathbb{N}^*$

f) $f(x) = \arctan\left(\frac{12 \sin x}{5+13 \cos x}\right)$

2. Cet exercice a pour but de montrer comment on peut calculer la dérivée des fonctions trigonométriques réciproques sans passer par le rapport de Newton et sans appliquer directement la formule vue en cours.

- a) En dérivant à l'aide des règles de calcul chaque côté de l'égalité

$$\sin(\arcsin(x)) = x,$$

montrer que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$

- b) Reproduire la même méthode pour calculer $\arccos'(x)$ et $\arctan'(x)$

3. Soit Γ la courbe d'équation $y = 3 \arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[.$

- a) Montrer que la courbe Γ admet une tangente de pente $m = 3$.

Déterminer l'équation cartésienne de cette tangente.

- b) Pour quelle valeur de x , la courbe Γ admet-elle au point $(x, f(x))$, une normale de pente $m = -\frac{1}{2}$?

4. Soit Γ la courbe d'équation $y = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$

Montrer que la droite t d'équation $y = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}x)$ est tangente à Γ .

5. Montrer que la fonction dérivée de la fonction f est identiquement nulle.

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

En déduire l'expression de $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ en fonction de $\arctan x$ sur chaque intervalle de son domaine de continuité.

Puis déduire le graphe de la fonction $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ de celui de la fonction $\arctan x$.

6. Exercice facultatif

Montrer que les fonctions suivantes ont même fonction dérivée sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{12 \sin x}{5+13 \cos x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 2 \arctan\left(\frac{3+2 \tan(x/2)}{3-2 \tan(x/2)}\right).$$

Puis en déduire que $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

7. On considère la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

- a) Donner le domaine de définition de la fonction f .
 - b) Déterminer la fonction dérivée de f ainsi que son domaine de définition.
 - c) En déduire la représentation graphique de f .
-

Réponses de la série 10 bis

$$1. \quad a) \quad a'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1+2x}{x}\right) \qquad d) \quad d'(x) = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$b) \quad b'(x) = -\cos x \sin(2 \sin x) \qquad e) \quad e'(x) = -\frac{3}{\sqrt{-9x^2 + 6x}}$$

$$c) \quad c'(x) = p q r x^{q-1} \cos(p x^q) [\sin(p x^q)]^{r-1} \qquad f) \quad f'(x) = \frac{12}{13 + 5 \cos x}$$

$$3. \quad a) \quad \text{En } x = \frac{\pi}{3}, \quad \Gamma \text{ admet une tangente d'équation : } y - \frac{\pi}{2} = 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$b) \quad x = \arcsin \frac{3}{4}$$

$$4. \quad \text{La droite } t \text{ est tangente à } \Gamma \text{ en } T\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$5. \quad \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} - \arctan x & \text{si } x < -1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$6. \quad f'(x) = g'(x) = \frac{12}{13 + 5 \cos x}$$

$$7. \quad a) \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{2}{1+x^2} [\operatorname{sgn}(1-x^2) + \operatorname{sgn} x], \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}.$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} -\pi - 4 \arctan x & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 4 \arctan x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \pi & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
