

Série 10

1. Pour chaque fonction f ci-dessous, donner le nombre dérivé $f'(x_0)$ pour tout $x_0 \in D_f$ en calculant la limite du rapport de Newton.

- a) $f(x) = \cos(x)$
- b) $f(x) = \cot(x)$
- c) $f(x) = \sin(2x)$
- d) $f(x) = \sin(3x)$
- e) $f(x) = \cos^3(x)$
- f) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Pour chaque paire de fonctions f et g ci-dessous, montrer que f et g sont des IPE autour de $x_0 = 0$.

- a) $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = x$
- b) $f(x) = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$ et $g(x) = -x$
- c) $f(x) = \arctan(\sin(x))$ et $g(x) = \sin(x)$

3. On considère les deux fonctions $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$ et $g(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$.

- a) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, f(0))$.
- b) Donner l'équation de la tangente au graphe de g au point $(0, g(0))$.
- c) Montrer que ces deux droites sont orthogonales.

Indication : que vaut le produit des pentes ?

4. Donner l'équation de la droite normale au graphe de la fonction $f(x) = 3 \sin(2x)$ au point $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{2}\right)$.

Indication : la droite normale à un graphe de fonction au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite perpendiculaire en ce point à la tangente au graphe.

5. On décrit le demi-cercle supérieur du cercle trigonométrique comme le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1].$$

En s'aidant d'un dessin, et sans calculer le nombre $f'(x_0)$, donner la pente de la tangente t au graphe G_f au point $(x_0, f(x_0))$ pour tout $x_0 \in]-1, 1[$. En déduire la valeur de $f'(x_0)$.

Indication : commencer par calculer la pente de la droite reliant l'origine au point $(x_0, f(x_0))$.

Réponses de la série 10

1. a) $f'(x_0) = -\sin(x_0)$
b) $f'(x_0) = -1 - \cot^2(x_0) = \frac{-1}{\sin^2(x_0)}$
c) $f'(x_0) = 2 \cos(2x_0)$
d) $f'(x_0) = 3 \cos(3x_0)$
e) $f'(x_0) = -3 \cos^2(x_0) \sin(x_0)$
f) $f'(x_0) = \frac{-1}{1+x_0^2}$
3. a) $t_f : y = \frac{\pi}{2} - x$
b) $t_g : y = \frac{\pi}{2} + x$
4. $n : y = \frac{3}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{\pi}{12} \right)$
-