

Série 9

1. Soit $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels quelconques. Montrer à l'aide de la définition de la limite d'une fonction que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = ax_0 + b$.

2. En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1.$$

3. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + (x - \frac{3}{2}) \cdot \operatorname{sgn}(1 - x)$.

- a) Faire la représentation graphique de la fonction f (unité = 6 carrés).
b) Pour $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, déterminer graphiquement $\delta = \delta_1$ vérifiant la relation suivante :

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

- c) Qu'en est-il pour $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{3}$?

4. Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0 .

a) $a(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 2x - 3}$, $x_0 = 1$, c) $c(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^5 + x^3}}{x^2 + 3x}$, $x_0 = 0$.

b) $b(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x - 1}{x}$, $x_0 = 0$,

5. Pour quelle valeur du paramètre réel a , la limite suivante existe-t-elle ?

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

Donner alors la valeur de cette limite.

6. On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x \cdot (x - b)^2}{(x + 1)(x - a)}$, où a et b sont des paramètres réels.

- a) Déterminer les conditions sur les paramètres a et b pour que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. Donner alors la valeur de cette limite.
b) Déterminer les conditions sur les paramètres a et b pour que $f(x)$ diverge vers l'infini lorsque $x \rightarrow a^+$ et $x \rightarrow a^-$.
Préciser alors si cette limite est égale à $+\infty$ ou $-\infty$.

7. Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0 .

a) $a(x) = \left(\frac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos \frac{\pi}{x+2} \right) (-2 + \sin \frac{\pi}{x+2})$, $x_0 = -2$.

b) $b(x) = \frac{1}{2x - 6 + \sqrt{x^2 + x - 2}}$, $x_0 = 2$.

8. Calculer les limites suivantes :

a) $a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}$

d) $d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos x - 3 \cos^2 x}{\sin(x^2 \sqrt{4 - x})}$

b) $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^6)}{(1 - \cos 3x)^3}$

e) $e = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}$

c) $c = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + 2 \cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

f) $f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2 \sin x - \sin(2x)]^2}{x^6} \sin\left(\frac{1}{x^6}\right)$.

9. Exercice facultatif.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 .

Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b.$$

Réponses de la série 9

4. a) $\lim_{x \rightarrow 1} a(x) = \frac{5}{4}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} b(x) = 1$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = \frac{1}{3}$,

5. $a = 15$, la limite vaut alors -1 .

6. a) La limite existe si et seulement si $a = 0$ ou $a = b$,

- si $a = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b^2$,
- si $a = b = -1$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$,
- si $a = b \neq -1$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

b) La limite est infinie si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq b$,

- si $a < -1$, alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$,
- si $a = -1$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$,
- si $-1 < a < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$,
- si $0 < a$, alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

7. a) $\lim_{x \rightarrow -2} a(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} b(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} b(x) = +\infty$.

8. a) $a = \frac{3}{2}$

d) $d = 1$

b) $b = \frac{8}{729}$

e) $e = \frac{2}{\pi}$

c) $c = -1$

f) f n'existe pas
