

Série 8

1. On considère la fonction $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

a) On fixe $\varepsilon = \frac{1}{10}$; déterminer M tel que $x > M \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

b) A l'aide de la définition de la limite d'une fonction, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

2. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

a) $a(x) = \frac{(2x+1)^2(3x-1)(25x^2-1)}{60x^5 - x^3 - 6x + 8}$

d) $d(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + \sin x}}$

b) $b(x) = \frac{|x| \sqrt{x+x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4-1}}$

e) $e(x) = \frac{(x^2+1)(\sin x - 2)}{2x+1}$

c) $c(x) = \frac{\cos x \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

f) $f(x) = \sqrt{x(x+1)} - x$.

3. Etudier la convergence de la fonction f définie par $f(x) = \frac{(x+1) \sin x}{2x+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier rigoureusement votre réponse.

4. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $-\infty$.

a) $a(x) = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$

c) $c(x) = x^2 (\sqrt[3]{8x^3-1} - 2x)$

b) $b(x) = (\sqrt{x^2+1} + 2x)(3 - \cos^2 x)$

d) $d(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2-x}$.

5. Déterminer p et q réels de sorte que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on ait

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + ax + b} - (px + q) \right] = 0.$$

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Calculer, si elle existe, la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} \cdot E\left(\frac{x}{b}\right)$.

7. Exercice facultatif.

Démontrer le résultat suivant :

Soit f une fonction à valeurs réelles strictement positives.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Réponses de la série 8

1. a) $M \geq 21$.

b) $\forall \varepsilon > 0, \quad x > M(\varepsilon) \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{2x}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon.$

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 5$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = 0$.

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

3. $f(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

On le démontre en définissant deux suites (a_n) et (b_n) qui divergent vers $+\infty$ et telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.

4. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = -\frac{1}{12}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = -\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = -\frac{1}{2}$.

5. $p = -1$ et $q = -\frac{a}{2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} \cdot E\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{a}{b}$
