

Série 7

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x|x|$

d) $d(x) = |\sin x| + \cos(\sqrt{2}x)$

b) $b(x) = x(x^2 + px + q), \quad p, q \in \mathbb{R}$

e) $e(x) = \tan^2\left(\frac{2}{x} + x\sqrt{|x|}\right)$

c) $c(x) = E(\sin x)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 3x^3 + x + a}, \quad a \in \mathbb{R}.$

2. Si f est une fonction périodique, il est en général facile de se convaincre de sa périodicité, mais il est souvent difficile de déterminer sa période.

Pour la déterminer, on peut esquisser le graphe de f (c.f. a)), ou essayer de transformer l'expression de $f(x)$ pour se ramener à une fonction d'expression plus simple dont on connaît la période (c.f. b)).

Déterminer la période, si elle existe, des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x - E(x),$

b) $b(x) = \sin(ax) \cdot \cos(ax), \quad a \in \mathbb{R}.$

3. Esquisser le graphe des fonctions suivantes, puis en déduire leur ensemble de définition et leur ensemble image.

a) $a(x) = |2x + |x - 2||$

b) $b(x) = \frac{|x|}{x^3 + x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad b(0) = 2.$

4. a) On considère les deux fonctions $A(x) = E(x)$ et $a(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

Esquisser le graphe de la fonction $A \circ a$.

b) On considère les deux fonctions $B(x) = x - \frac{\pi}{2}$ et $b(x) = \sin(x)$

Esquisser le graphe des fonctions $B \circ b$ et $b \circ B$.

5. Soit f une fonction définie sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.

Montrer que f peut toujours s'exprimer comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

6. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1}.$$

Montrer que cette fonction n'est pas surjective, puis restreindre son ensemble d'arrivée de sorte qu'elle le devienne.

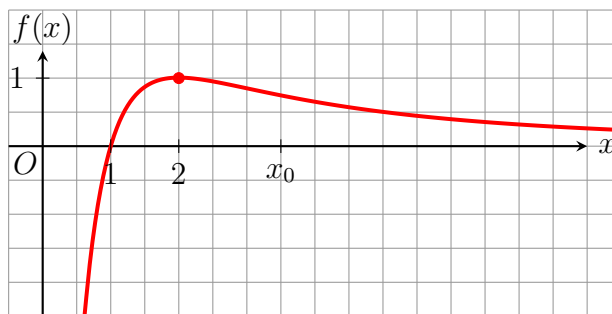
7. Pour chacune des deux fonctions suivantes, esquisser son graphe, puis déterminer l'intervalle I (le plus grand possible) contenant x_0 de sorte que la fonction soit injective sur I .

a) $a(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$, $x_0 = -\frac{2}{3}$, b) $b(x) = \sin(x)$, $x_0 = 9$.

8. On donne ci-joint le graphe d'une fonction f qui admet les axes de coordonnées comme asymptotes.

Soit $x_0 > 2$.

Déterminer un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et tel que la fonction $f : D \rightarrow]-\infty, 1]$ soit bijective.



Réponses de la série 7

1. Fonctions paires : $d(x)$ et $e(x)$.

Fonctions impaires : $a(x)$, $[b(x) \text{ si } p = 0]$ et $[f(x) \text{ si } a = 0]$.

Fonctions ni paires ni impaires : $c(x)$, $[b(x) \text{ si } p \neq 0]$ et $[f(x) \text{ si } a \neq 0]$.

2. a) $T = 1$. b) $T = \frac{\pi}{|a|}$, $a \neq 0$.

3. a) $D_a = \mathbb{R}$, $\text{Im } a = \mathbb{R}_+$
b) $D_b = \mathbb{R}$, $\text{Im } b =]-1; 0[\cup]0; 1[\cup \{2\}$.

4. a) $A \circ a = E(\sqrt{16 - x^2})$.
b) $B \circ b = -\frac{\pi}{2} + \sin x$ et $b \circ B = \sin(x - \frac{\pi}{2})$.

5. Poser $f(x) = p(x) + i(x)$ où p est une fonction paire et i une fonction impaire.

6. $B = \text{Im } f = [-4, 6]$

7. a) $I =]-1, 0]$ b) $I = [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$

8. Il y a une infinité de solutions possibles, mais aucune telle que D soit un intervalle.
-