

Série 6 bis

1. Calculer la valeur des sommes ci-dessous.

a) $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

b) $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

c) $S = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$

d) $S = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi^3} + \dots$

e) $S = \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$

f) pour $0 < p < 1$, $S = -2p^4 + 2p^5 - 2p^6 + 2p^7 + \dots$

2. Depuis le sol, on lance une balle vers le haut de sorte qu'elle atteigne la hauteur $h_1 = 5 \text{ m}$. Elle retombe et rebondit instantanément pour atteindre une hauteur $h_2 = p \cdot h_1$, $p = 0,81$, et ainsi de suite, chaque nouvelle hauteur atteinte étant p fois la précédente.

En utilisant la relation entre la hauteur et le temps

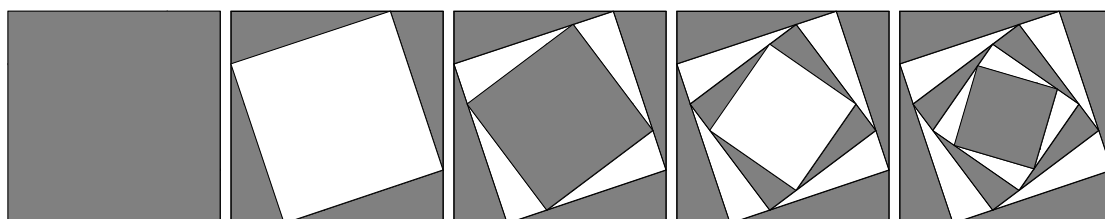
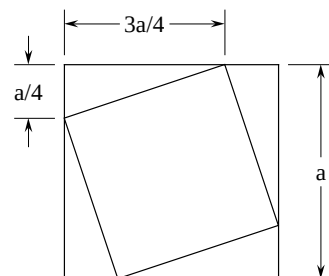
$$h = \frac{1}{2} g t^2, \quad g = 10 \text{ m s}^{-2},$$

donner le temps jusqu'à l'immobilisation de la balle.

3. Dans un carré de côté a , on inscrit un deuxième carré comme décrit ci-contre.

Dans le deuxième carré, on inscrit un troisième carré de la même manière, et ainsi de suite.

On grise le carré initial de côté a , étape par étape de la façon suivante :



étape 1

étape 2

étape 3

étape 4

étape 5

On note A_n l'aire grisée à l'étape n , $n \in \mathbb{N}^*$.

(étape 2 : de l'aire grisée à l'étape 1, on soustrait l'aire du deuxième carré ;
étape 3 : à l'aire grisée à l'étape 2, on ajoute l'aire du troisième carré ; etc...)

- Déterminer l'expression de A_n en fonction de n .
- Calculer, si elle existe, la limite de la suite (A_n) lorsque n tend vers l'infini.

4. (Exercice facultatif)

On considère la suite (a_n) définie par $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.
- En déduire que cette suite est croissante et majorée.
- Soit (e_n) la suite définie par $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Elle converge vers e .

Montrer que la suite (a_n) converge aussi vers e .

Réponses de la série 6 bis

1. a) $S = \frac{3}{2}$.

b) $S = \frac{2}{3}$.

c) $S = -\frac{4}{5}$.

d) $S = \frac{\sqrt{2}\pi}{\pi-1}$.

e) $S = \frac{1}{20}$.

f) $S = -2p^4 \frac{1}{1+p}$.

2. Le temps jusqu'à l'immobilisation de la balle est égal à 20 secondes.

3. $A_n = a^2 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{5}{8}\right)^n}{\frac{13}{8}}$; $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{8}{13} a^2$.