

Série 6

1. Calculer, si elle existe, la limite des suites définies par les termes généraux suivants :

$$\text{a) } a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{n+3}, \quad \text{b) } b_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+an}, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\text{c) } c_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}, \quad \text{d) } d_n = \frac{3(n+2)! + 2(n+1)!}{(n+3)!},$$

$$\text{e) } e_n = (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{f) } f_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n+1},$$

$$\text{g) } g_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1} - (n^2+1)}.$$

2. A l'aide du théorème des deux gendarmes, étudier la convergence des suites suivantes.

$$\text{a) } a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\text{b) } b_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\text{c) } c_n = \frac{n^2}{n^3+3n+1} + \frac{n^2+1}{n^3+3n+2} + \frac{n^2+2}{n^3+3n+3} + \cdots + \frac{n^2+2n-1}{n^3+5n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Etudier la convergence de la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \frac{n!}{2^n}$.

4. Montrer à l'aide de la définition de la limite infinie que $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^2 - 10n] = +\infty$.

5. Soit (a_n) une suite. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifier. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) Si (a_n) n'est pas bornée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$.

b) Soit (b_n) une suite telle que $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$ pour $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, alors $a > 0$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Si (a_n) ne converge pas vers a , alors il existe $\epsilon > 0$ et une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_n \notin]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

6. Exercice facultatif

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Réponses de la série 6

1. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{a}{2}$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$
e) La suite (e_n) n'admet pas de limite (elle diverge).
f) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty$
g) $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = -\infty$
2. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$
3. La suite (a_n) diverge, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
4. $N > 5 + \sqrt{25 + A}$.
5. a) Faux.
b) Faux.
c) Faux.
d) Vrai.
-