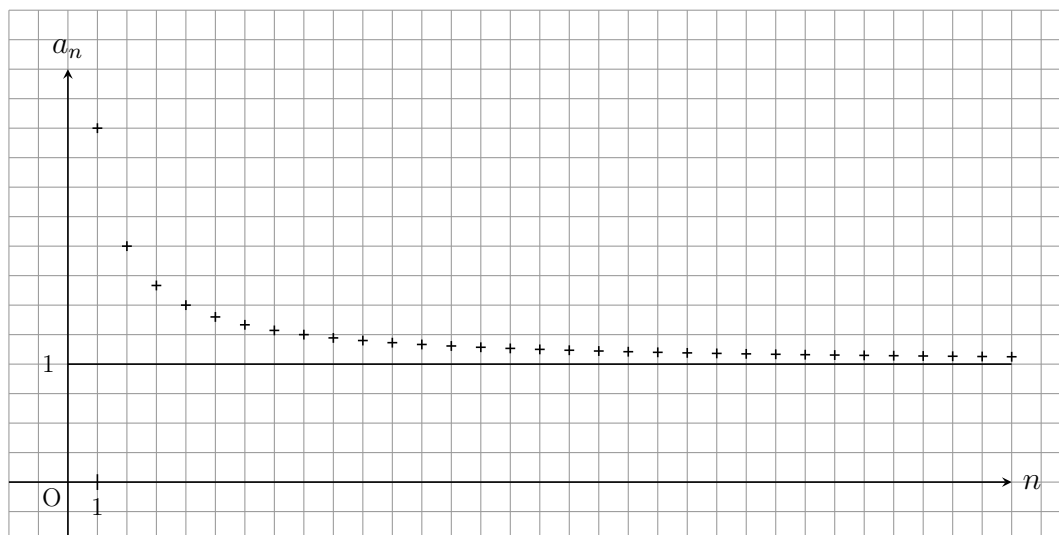


Série 5

1. Voici la représentation de la suite définie par $a_n = \frac{n+2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.



- a) Soit $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$.

Déterminer graphiquement $N(\varepsilon)$ dans les trois cas suivants :

- i) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ii) $\varepsilon = \frac{1}{4}$, iii) $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

- b) Démontrer à l'aide de la définition de la limite d'une suite que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

2. On considère la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que (a_n) converge vers $a = 1$.

3. Soient (a_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$

Quand ce n'est pas le cas, s'en convaincre en exhibant un contre-exemple.

- a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, tel que $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.
 b) $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, tel que $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon$.
 c) $\forall \varepsilon \geq 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, tel que $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.
 d) $\exists N \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall \varepsilon > 0, n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.
 e) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists \varepsilon > 0$ tel que $n \geq N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.

4. Montrer que les suites ci-dessous sont majorées en exhibant un majorant.

- a) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $b_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

c) $c_n = \frac{n+3}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Indication : combien y a-t-il de termes dans la somme ?

d) $d_n = \frac{n+3}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+2} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

5. a) Soit $r \in \mathbb{R}, r \neq 1$. On considère la suite

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \dots$$

Soit (A_n) définie par

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k,$$

c'est-à-dire, A_n est la somme des premiers n termes de la suite ci-dessus.
Montrer par récurrence que

$$A_n = \frac{1-r^n}{1-r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- b) On considère la suite $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ d'entiers naturels impairs. Soit A_n la somme des premiers n termes de cette suite. Montrer par récurrence que

$$A_n = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

6. On considère la suite (a_n) définie par récurrence de la façon suivante :

$$a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}, \quad a_1 = 3, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer le terme général de la suite (a_n) , puis démontrer ce résultat par récurrence.

7. a) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que la somme $(a_n + b_n)$ est une suite constante, mais pour lesquelles (a_n) et (b_n) ne sont pas constantes.
b) Montrer que si (a_n) et (b_n) sont bornées, alors la suite $(a_n \cdot b_n)$ est bornée.
c) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que $(a_n \cdot b_n)$ est bornée, mais pour lesquelles ni la suite (a_n) est bornée ni la suite (b_n) est bornée.
d) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que (a_n) est strictement croissante, (b_n) est strictement décroissante et $a_1 < b_1$, mais telles qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $b_n < a_n$.

8. Exercice facultatif

[Voir l'Exemple 2 du [Chapitre_2_sec_1_suites_introduction.pdf](#) des slides du cours sur Moodle pour la définition de fraction continue, ainsi qu'un exemple.]

Déterminer une fraction continue qui décrit $\sqrt{5}$. Calculer les premiers termes de la suite associée à cette fraction continue. Puis définir cette suite par récurrence.

Réponses de la série 5

1. Si $N > \frac{2}{\varepsilon}$, alors $n \geq N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$
2. Si $N > \frac{1}{2\varepsilon + \varepsilon^2}$, alors $n \geq N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$
3. a) C'est la définition du cours.
b) La proposition est équivalente.
c) La proposition n'est pas équivalente.
d) La proposition n'est pas équivalente.
e) La proposition n'est pas équivalente.
4. a) Par exemple $M = 1$.
b) Par exemple $M = 2$.
c) Par exemple $M = 4$.
d) Par exemple $M = 4$.
7. a) Par exemple $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$.
c) Par exemple $a_n = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, \dots$ et $b_n : 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, \dots$
d) Par exemple $a_n = 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.
-