Série 12

1. Estimer, à l'aide de l'approximation linéaire, la quantité $\sqrt[4]{16,032}$.

2. Soient $g(x)$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1+\sqrt{16+x^2}}{1-\sqrt{25-x^2}}$$

et $f(x)$ une fonction définie dans un voisinage de x_0 telle que $f(x_0) = 3$.

Soient A l'approximation linéaire de $f(x_0 + \Delta x)$ en x_0 et B l'approximation linéaire de $(g \circ f)(x_0 + \Delta x)$ en x_0 pour un Δx donné.

Sachant que $A = \dfrac{22}{7}$, en déduire la valeur de B.

3. Soit $f(x) = x^2 \cdot (2 - x^2)$.

Montrer qu'il existe au moins un point d'abscisse $x \in \,]\,0\,,\,1\,[$ tel que la droite tangente au graphe de f en ce point soit parallèle à la droite d d'équation $x - y = 4$.

4. On considère la fonction $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[\,0\,,\,2\,]$, et en déduire qu'il existe $c \in \,]\,0\,,\,2\,[$ tel que $f(2) - f(0) = (2-0)\, f'(c)$.

b) Déterminer toutes les valeurs de c.

5. Dériver sur $\mathbb{R}^*$ les deux fonctions suivantes :

a) $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $\sqrt[5]{x^2} = \begin{cases} x^{\frac{2}{5}} & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{5}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

6. Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ est bornée. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Alors

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soient $a \neq b$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors soit f est continue sur $[a, b]$, soit f ne s'annule jamais sur $[a, b]$.

d) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et f dérivable à droite de $x = 0$,
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et f dérivable à gauche de $x = 0$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponses de la série 12

1. $A = 2,001\,.$

2. $B = -2,1\,.$

4. $c = \dfrac{1}{2}$ ou $c = +\sqrt{2}\,.$

5. $\left(\sqrt[3]{x}\,\right)' = \dfrac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*,$ $\qquad \left(\sqrt[5]{x^2}\right)' = \dfrac{2}{5\,\sqrt[5]{x^3}}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$

6. a) Vrai. b) Vrai. c) Faux. d) Faux.