Série 11

1. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition et celui de la fonction dérivée.

a) $a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \dfrac{6}{x}$

b) $b(x) = \dfrac{4x-1}{2x+1}$

c) $c(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}$

d) $d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

e) $e(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x^3}\right)^2}$

g) $g(x) = (x-1)^5(2x+1)^5$; pour quelles valeurs de x la dérivée $g'(x)$ est-elle nulle ?

h) $h(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+a)}$; pour quelle valeur de a la dérivée $h'(x)$ est-elle nulle en $x = -1$?

2. Déterminer l'équation de la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ tangente à la droite d'équation $y - 3x - 1 = 0$ au point T d'abscisse $x_T = 1$.

3. Déterminer les points de tangence T des tangentes issues de l'origine à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{3x+1}{x^2-x+4}$.

4. Soient f une fonction dérivable en $x_0 = 2$, Γ_1 la courbe d'équation $y = f(x)$ et t_1 la tangente à Γ_1 en $x_0 = 2$.

$$t_1 : \ 3x - 2y - 4 = 0 .$$

Soient g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, Γ_2 la courbe d'équation $y = g\circ f(x)$ et t_2 la tangente à Γ_2 en $x_0 = 2$.

Déterminer l'équation cartésienne de t_2.

5. On donne deux arcs de parabole Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1 : \quad f_1(x) = -2x^2+6 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad f_2(x) = -(x-1)^2 .$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t commune aux courbes Γ_1 et Γ_2, de pente négative.

6. Montrer que les graphes des deux fonctions f et g admettent un unique point d'intersection,

$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-2x+3},$$

puis calculer l'angle φ entre les deux courbes en ce point.

7. Soit $\widehat{b}$ la fonction définie dans l'exercice 7 de la série 10 (prolongée par continuité de la fonction b donnée dans l'exercice 4 b) de la série 9) :

$$\widehat{b}(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \widehat{b}(0) = 1 .$$

La fonction $\widehat{b}$ est-elle continûment dérivable en $x_0 = 0$?

8. Calculer la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^{-3}$ b) $g(x) = \sin(ax)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

9. Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

a) Soient f, g deux fonctions réelles telles que $h = g \circ f$ soit continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si g est continue sur $\mathbb{R}$, alors f est continue en x_0.

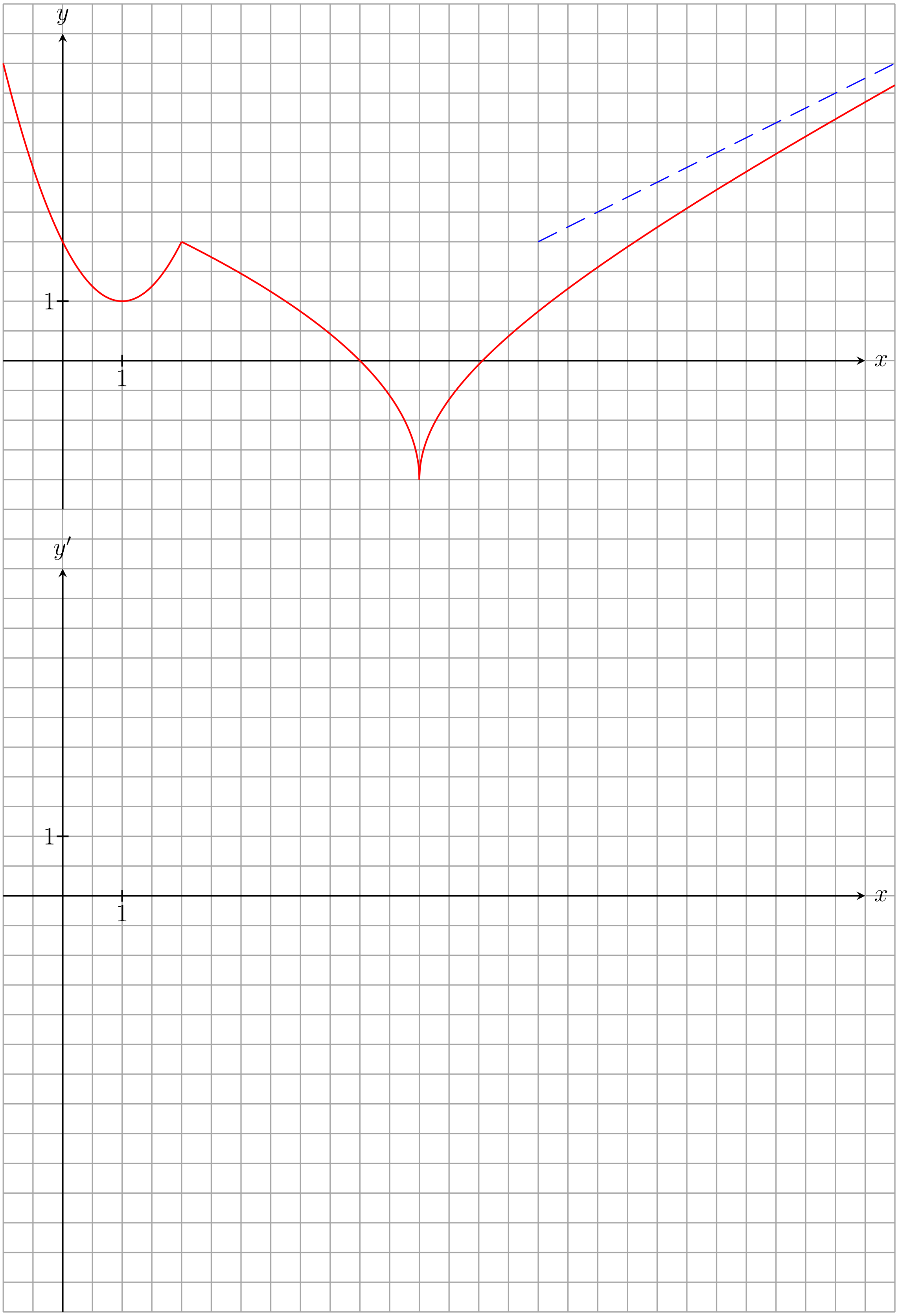
b) Si f est dérivable en $x=0$, alors $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(3h)-f(h)}{h} = 2\,f'(0)$.

c) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Si $f'(0)=0$, alors $(f\circ g)'(0) = 0$.

d) Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.

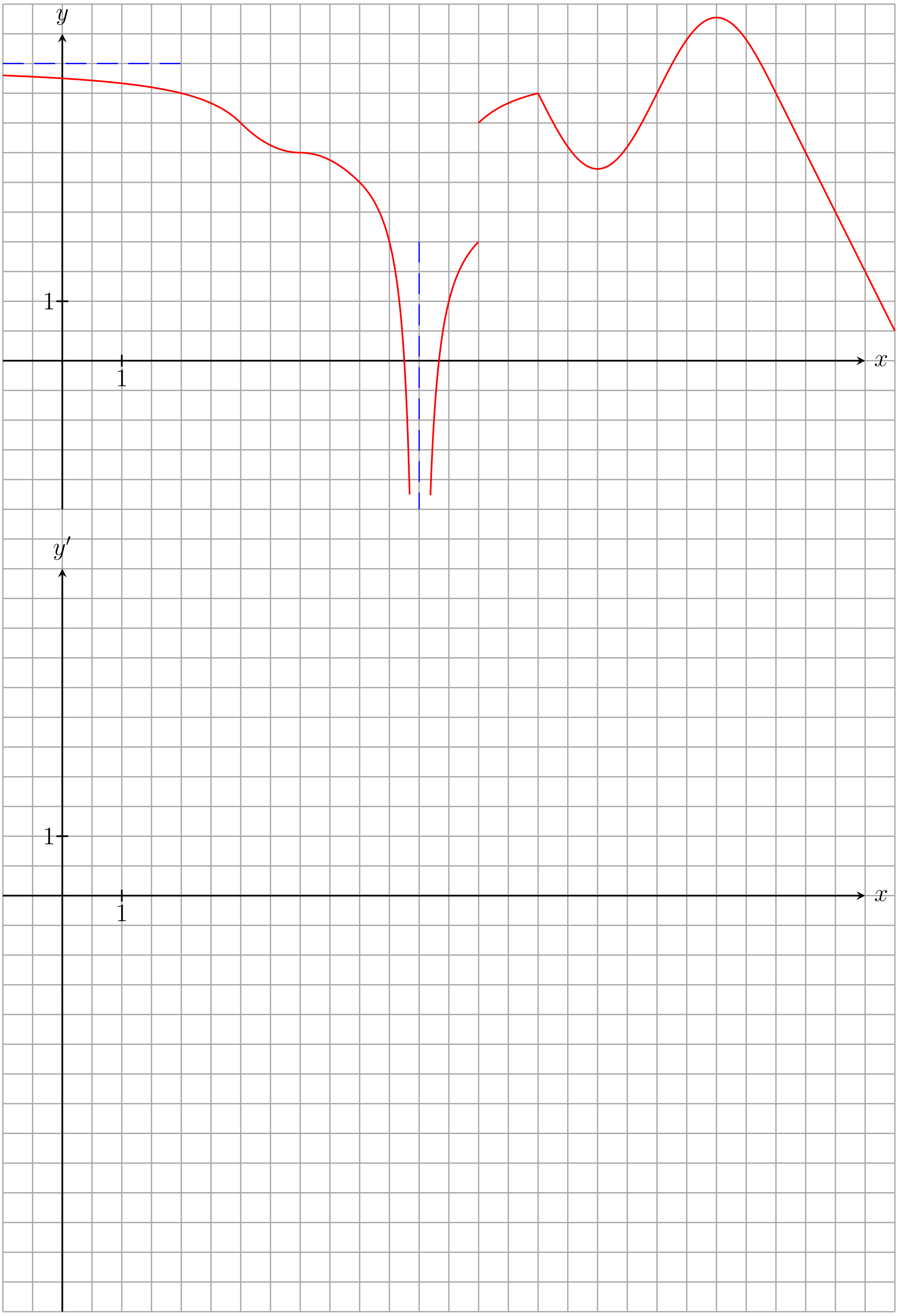
10. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.



11. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.



Réponses de la série 11

1. a) $a'(x) = 6\left(x^5 + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{1}{x^2}\right), \quad D_a = D_{a'} = \mathbb{R}^*.$

b) $b'(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}, \quad D_b = D_{b'} = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}.$

c) $c'(x) = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3\,(1-2x)}}, \quad D_c = \,]-1\,;\,\frac{1}{2}]$ et $D_{c'} = \,]-1\,;\,\frac{1}{2}[\,.$

d) $d'(x) = \frac{7}{8}\frac{1}{\sqrt[8]{x}}, \quad D_d = \mathbb{R}_+$ et $D_{d'} = \mathbb{R}_+^*.$

e) $e'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2, \quad D_e = D_{e'} = \mathbb{R}.$

f) $f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x^3}}}, \quad D_f = \mathbb{R}_+$ et $D_{f'} = \mathbb{R}_+ - \{1\}.$

g) $g'(x) = 5\,(4x-1)\,(x-1)^4\,(2x+1)^4, \quad D_g = D_{g'} = \mathbb{R},$

$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,1\}.$

h) $h'(x) = \frac{3x+2a-1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+a)^2\,(x-1)}}, \quad D_h = \mathbb{R}$ et $D_{h'} = \mathbb{R} - \{1\,;\,-a\},$

$h'(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2.$

2. Equation de la parabole : $y = x^2 + x + 2.$

3. $T\,(-1\,;\,-\frac{1}{3})$

4. $t_2: \; 3x + 4y - 8 = 0.$

5. $t: \; 4x + y - 8 = 0.$

6. $\varphi = \arctan(3).$

7. Oui, car $\lim_{x\to 0} \widehat{b}\,'(x) = \widehat{b}\,'(0)$

8. a) $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\,(-1)^n\,(n+2)!\,x^{-(n+3)}$, à démontrer par récurrence.

b) $g^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$, à démontrer par récurrence.

9. a) Faux. b) Vrai. c) Faux. d) Faux.