

Série 10

1. Peut-on trouver des valeurs des constantes A et B de sorte que les fonctions suivantes soient continues en $x = 0$?

a) $a(x) = \frac{|x|(x+1) + x}{x^2(x+1)}$ si $x \neq 0$ et $a(0) = A$,

b) $b(x) = \frac{x\sqrt{3-4\cos x + \cos^2 x}}{|x|\sin x}$ si $x \neq 0$ et $b(0) = B$.

2. a) La fonction définie par $f(x) = |\tan x| \cdot \cos^3(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle continue en $x = 0$?

b) Montrer que la fonction $f(x) = x - E(x^2)$ est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

3. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x^2)}{\sin^2 x - \tan^2 x}.$$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

4. Montrer que les deux courbes Γ_1 et Γ_2 admettent un point d'intersection, localiser son abscisse sur un intervalle de longueur Δ :

a) $\Gamma_1 : y = \cos(x)$, $\Gamma_2 : y = x^3$, $\Delta = \frac{\pi}{12}$.

- b) Pour les étudiants qui connaissent la fonction logarithme népérien :

$\Gamma_1 : y = \ln(x)$, $\Gamma_2 : y = \sqrt{x-2}$, $\Delta = 1$.

5. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x = 0$?

a) $a(x) = \tan |x|$ c) $c(x) = \sin(x) \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $c(0) = 0$

b) $b(x) = x \sin |x|$ d) $d(x) = \sin^2(x) \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $d(0) = 0$.

6. On considère la fonction g définie dans un voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ par

$$g(x) = \frac{\cos(2x) + \sin x}{\sin(2x)} \quad \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad g(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Montrer à l'aide de la définition que la fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7. Montrer que la fonction $b(x)$ de l'exercice 4. b) de la série 9 peut être prolongée par continuité en $x_0 = 0$.

Est-elle alors dérivable en $x_0 = 0$?
$$b(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x - 1}{x}.$$

8. En calculant la limite du rapport de Newton associé, déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f en x_0 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 2.$$

9. Exercice facultatif.

Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de x_0 .

On dit que f admet une dérivée symétrique en x_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ existe. On note alors cette limite $f'_s(x_0)$.

* Montrer que si f est dérivable en x_0 , alors $f'_s(x_0)$ existe.

* Vérifier que la réciproque est fausse.

Réponses de la série 10

1. a) Non b) Oui : $B = 1$
2. a) oui, car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = f(\sqrt{2})$
3. Oui : $\widehat{f}(0) = -\frac{1}{2}$
4. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire
5. a) non b) oui c) non d) oui
6. La fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{4}$.
7. La fonction prolongée $\widehat{b}$ est dérivable en $x_0 = 0$ et $\widehat{b}'(0) = \frac{1}{2}$.
8. $t : x + 4y - 3 = 0$
-