Équations et inéquations irrationnelles

Rappel: $\left[u^2 = v^2 \text{ et } \operatorname{sgn}(u) = \operatorname{sgn}(v)\right] \iff u = v.$

- Résolution de $\sqrt{f(x)} = g(x)$
  - Déterminer $D_{\text{déf}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$, où
    D_f = domaine de définition de la fonction f,
    D_g = domaine de définition de la fonction g.
  - Déterminer $D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$.
  - Sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, on a $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff f(x) = (g(x))^2$.
    L'ensemble solution est donc donné par $S = D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = (g(x))^2\}$.

Rappel: si $u \geq 0$ et $v \geq 0$, alors on a $u^2 \leq v^2 \iff u \leq v$.

- Résolution de $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$
  - Déterminer $D_{\text{déf}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$, où
    D_f = domaine de définition de la fonction f,
    D_g = domaine de définition de la fonction g.
  - Déterminer $D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$.
  - Sur $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, on a $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff f(x) \leq (g(x))^2$.
    L'ensemble solution est donc donné par $S = D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq (g(x))^2\}$.
- Résolution de $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$
  - Déterminer $D_{\text{déf}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$, où
    D_f = domaine de définition de la fonction f,
    D_g = domaine de définition de la fonction g.
  - Sur $D_{\text{déf}}$, $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff \begin{cases} g(x) < 0 & (i) \\ \text{ou} & \\ g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) \geq (g(x))^2 & (ii) \end{cases}$
  - Déterminer $S_i = D_{\text{déf}} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) < 0\}$.
  - Déterminer $S_{ii} = D_{\text{déf}} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq (g(x))^2\}$.
  - L'ensemble solution est donc donné par $S = S_i \cup S_{ii}$.

    Remarque: l'intersection avec $D_{\text{déf}}$ peut aussi être effectuée en dernière étape.

Remarque: si $u \geq 0$ et $v \geq 0$, alors on a $u^2 < v^2 \iff u < v$. Pour résoudre une inéquation avec une inégalité stricte, les inégalités larges doivent être remplacées par les inégalités strictes au moment d'appliquer ce résultat.