Exemples de révision contrôle 1

1. trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'inégalité

$$\sqrt{2mx} > x - 4m$$

en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

La première chose déterminer est l'ensemble de définition D_{def}. Le seul terme susceptible d'être problématique dans cette inégalité est la racine : il faut que $2mx \geq 0$. L'ensemble de définition dépend donc de la valeur du paramètre m et on a les cas

$$D_{\text{def}} = \begin{cases} \mathbb{R}_- & \text{si } m < 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } m = 0, \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } m > 0. \end{cases}$$

Sur cet ensemble de définition on peut procéder à la résolution suivant la règle

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \underset{D_{\text{def}}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} g(x) < 0 & (a) \\ \text{ou} & \\ f(x) > g^2(x) & (b) \end{cases}.}$$

Dans notre cas cela donne

$$\sqrt{2mx} > x - 4m \quad \underset{D_{\text{def}}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} x - 4m < 0 & (a) \\ \text{ou} & \\ 2mx > (x-4m)^2 & (b) \end{cases}.$$

La marche à suivre est maintenant de résoudre les inégalités (a) et (b) séparément, puis d'en faire l'union et finalement d'intersecter cette union avec l'ensemble de définition (on peut aussi faire l'intersection des ensembles solution S_a et S_b avec D_{def} d'abord et ensuite en faire l'union : $(S_a \cup S_b) \cap D_{\text{def}} = (S_a \cap D_{\text{def}}) \cup (S_b \cap D_{\text{def}})$).
L'inégalité (a) donne

$$x - 4m < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 4m \quad \Rightarrow \quad S_a =]-\infty, 4m[.$$

L'inégalité (a) donne

$$\begin{aligned} 2mx > (x-4m)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 10mx + 16m^2 < 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 > (x-8m)(x-2m) \\ &\Rightarrow \quad S_b = \begin{cases}]8m, 2m[& \text{si } m < 0, \\ \emptyset & \text{si } m = 0, \\ ]2m, 8m[& \text{si } m > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

L'union des deux ensembles solution donne

$$S_a \cup S_b = \begin{cases}]-\infty, 2m[& \text{si } m < 0, \\ \mathbb{R}_-^* & \text{si } m = 0, \\ ]-\infty, 8m[& \text{si } m > 0. \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble solution est

$$S = (S_a \cup S_b) \cap D_{\text{def}} = \begin{cases}]-\infty, 2m[& \text{si } m < 0, \\ \mathbb{R}_-^* & \text{si } m = 0, \\ [0, 8m[& \text{si } m > 0. \end{cases}$$

2. Montrer à l'aide de la définition, que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} = 0.$$

Rappelons la définition de la limite inifinie :

Définition. Pour une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad n \geq N \text{ implique } |a_n - l| < \epsilon.$$

Si pour un $\epsilon > 0$ quelconque, on arrive à déterminer une valeur $N(\epsilon)$ à partir de laquelle (i.e. pour $n \geq N(\epsilon)$) on a $|a_n - l| < \epsilon$, on aura vérifié par définition, que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

Soit alors une valeur $\epsilon > 0$ donnée et résolvons

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \underset{D_{\text{def}}=\mathbb{N}^*}{\Longleftrightarrow} \quad -\epsilon < \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\epsilon < \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} & \text{(toujours vrai)} \\ et & \\ \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} < \epsilon & \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \epsilon > 0 & \text{(toujours vrai par définition)} \\ et & \\ \frac{n}{n^2+1} < \epsilon^2 & \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 < \epsilon^2 n^2 - n + \epsilon^2 \quad \Longleftrightarrow \quad n \in]-\infty, n_-[\cup]n_+, \infty[,$$

$$\text{avec } n_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\epsilon^4}}{2\epsilon}.$$

Discutons ce résultat :

- Si $\epsilon > \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$, le discriminant $1 - 4\epsilon^4$ est négatif et les deux racines $n_\pm$ n'existent pas. Autrement dit, $0 < \epsilon^2 n^2 - n + \epsilon^2$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et on peut donc choisir $N(\epsilon) = 1$.

- Si $\epsilon \leq \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$, $n_+ = \frac{1+\sqrt{1-4\epsilon^4}}{2\epsilon}$ et on peut donc choisir $N(\epsilon)$ comme le premier nombre entier supérieur à n_+, à savoir $N(\epsilon) = \lfloor \frac{1+\sqrt{1-4\epsilon^4}}{2\epsilon} \rfloor + 1$.

On remarque que dans les deux cas, $N(\epsilon) = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ convient.
Ceci montre, que pour tout choix de $\epsilon > 0$, il existe un $N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N(\epsilon)$ implique $\left| \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} - 0 \right| < \epsilon$. Par définition, on a donc bien que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} = 0$.

3. Montrer à l'aide de la définition, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n} = \infty.$$

Rappelons la définition de la limite inifine :

Définition. Pour une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ssi

$$\forall B > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad n \geq N \text{ implique } a_n \geq B.$$

Si pour un $B > 0$ quelconque, on arrive à déterminer une valeur $N(B)$ à partir de laquelle (i.e. pour $n \geq N(B)$) on a $a_n \geq B$, on aura vérifié par définition, que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Soit alors une valeur $B > 0$ donnée et résolvons

$$a_n \geq B \iff \frac{n^2+2}{n} \geq B \iff n^2 + 2 \geq nB$$
$$\iff n^2 - nB + 2 \geq 0 \iff n \in [1, n_-] \cup [n_+, \infty[,$$
$$\text{où} \quad n_\pm = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 8}}{2}.$$

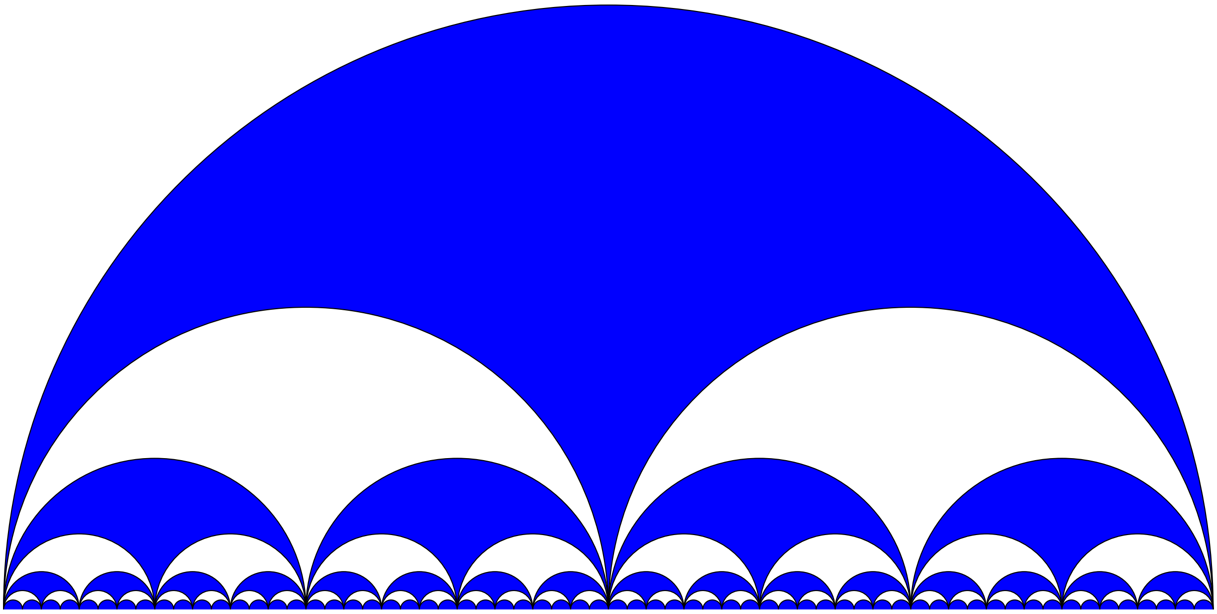
Discutons ce résultat :

- Si $B < \sqrt{8}$, le discriminant $B^2 - 8$ est négatif et les deux racines $n_\pm$ n'existent pas. Autrement dit, $n^2 - 2nB + 2 \geq 0$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$ et on peut donc choisir $N(B) = 1$.
- Si $B \geq \sqrt{8}$, $n_+ = \frac{B+\sqrt{B^2-8}}{2}$ et on peut donc choisir N comme le premier nombre entier supérieur à n_+, à savoir $N(B) = \lfloor \frac{B+\sqrt{B^2-8}}{2} \rfloor + 1$.

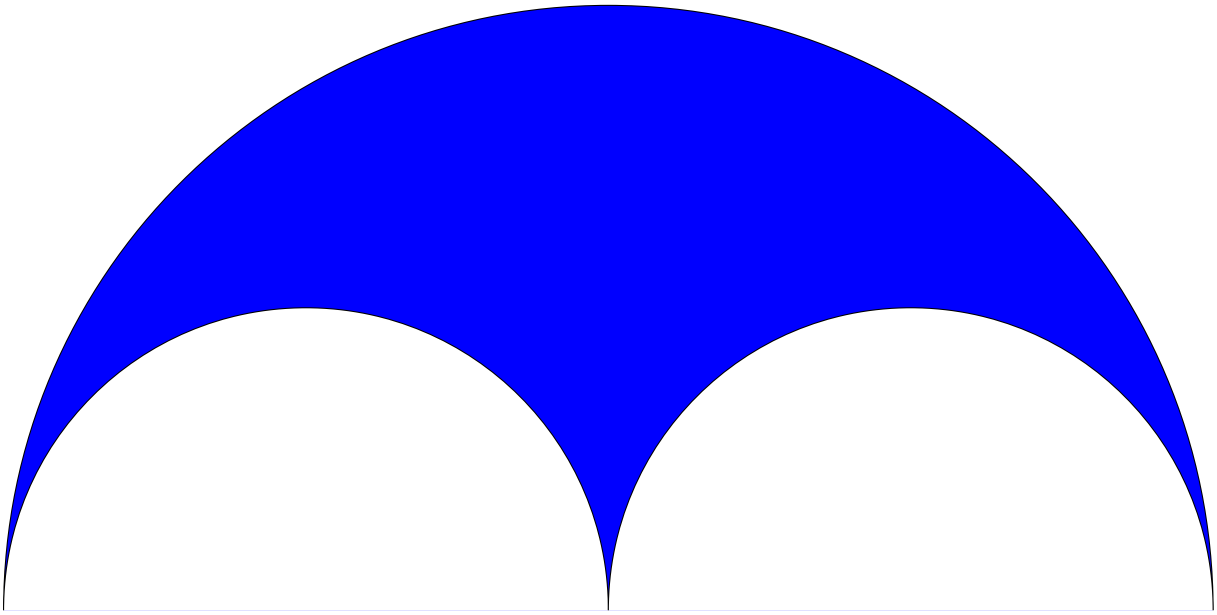
Ceci montre, que pour tout choix de $B > 0$, il existe un $N(B) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N(B)$ implique $\frac{n^2+2}{n} \geq B$. Par définition, on a donc bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n} = \infty$.

Problème facultatif

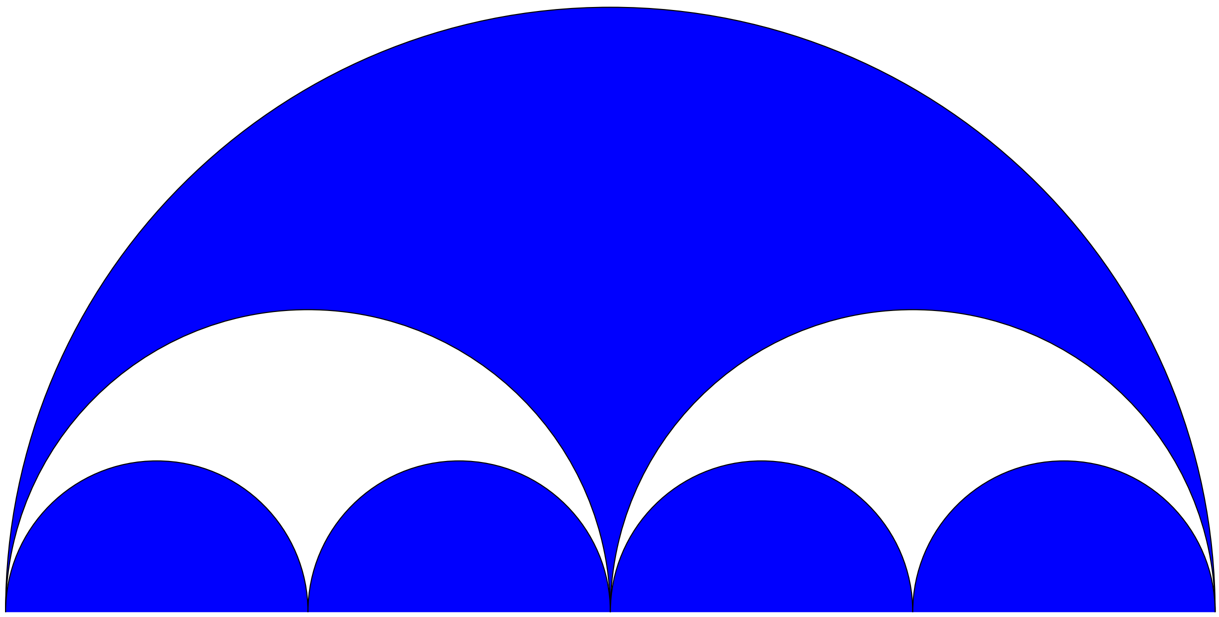
4. Calculer la surface en bleu de la figure suivante obtenue en dessinant un demi-cercle de rayon R, dont on a ôté deux demi-cercles de rayon $R/2$, auquel on a ajouté quatre demi-cercles de rayon $R/4$ et ainsi de suite :



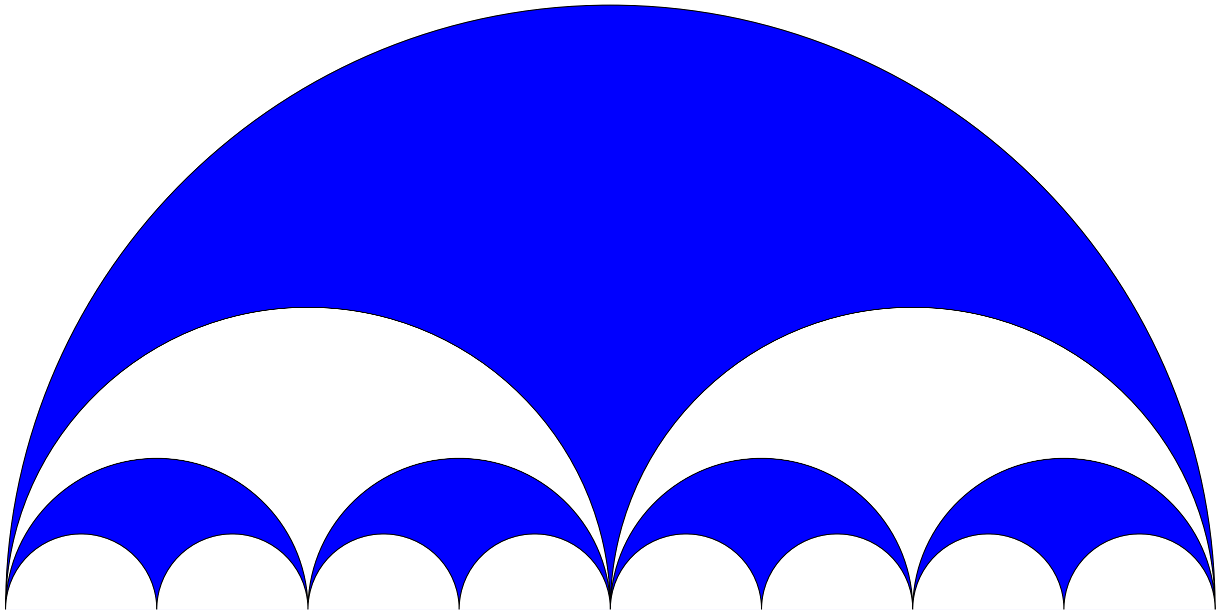
On commence par calculer l'aire A_1 du premier demi-cercle de rayon R : on obtient manifestement $A_1 = \frac{1}{2}\pi R^2$.
Puis on calcule l'aire A_2 obtenue en ôtant du grand demi-cercle l'aire de deux demi-cercles de rayon $R/2$:



On obtient manifestement $A_2 = \frac{1}{2}\pi R^2 - 2 \times \frac{1}{2}\pi(\frac{R}{2})^2 = \frac{\pi R^2}{2}(1 - \frac{1}{2})$.
Puis on calcule l'aire A_3 obtenue en ajoutant en ajoutant quatre demi-cercles de rayon $R/4$:



Clairement, $A_3 = A_2 + 4 \times \frac{1}{2}(\frac{R}{4})^2 = \frac{\pi R^2}{2}(1 - \frac{1}{2}) + 4 \times \frac{1}{2}(\frac{R}{4})^2 = \frac{\pi R^2}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$.
Puis on calcule l'aire A_4 obtenue en ôtant huit demi-cercles de rayon $R/8$:



Clairement, $A_4 = A_3 - 8 \times \frac{1}{2}(\frac{R}{8})^2 = \frac{\pi R^2}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) - 8 \times \frac{1}{2}(\frac{R}{8})^2 = \frac{\pi R^2}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8})$.
On voit se dessiner une suite géométrique

$$A_n = \frac{\pi R^2}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{\pi R^2}{2}\frac{1 - (-1)^n \frac{1}{2^n}}{1 - (-1)\frac{1}{2}}$$

de raison $q = \frac{-1}{2}$. En passant à la limite on trouve

$$A_\infty = \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{\pi R^2}{2}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\pi R^2}{3}.$$