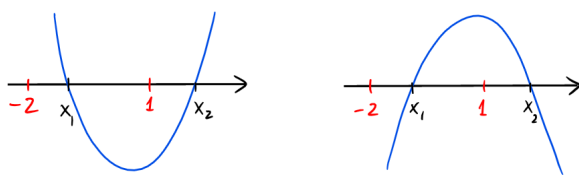


Exemple: placement des racines d'un trinôme

Soit

$$P(x) = \underbrace{m}_a x^2 - \underbrace{m}_b x - \underbrace{(m+1)}_c, \quad m \neq 0.$$

Pour quelles valeurs de m , le trinôme $P(x)$ admet-il deux racines x_1 et x_2 telles que $-2 \leq x_1 < 1 < x_2$?



(1) Deux racines distinctes $\iff \Delta > 0$

(2) Pour que $x_1 < 1 < x_2$, il faut que

$$\begin{cases} P(1) < 0 & \text{si } a > 0 \\ P(1) > 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ceci se résume en $a \cdot P(1) < 0$.

(3) Pour que $x_1, x_2 \geq -2$, il faut en plus que

$$\begin{cases} P(-2) \geq 0 & \text{si } a > 0 \\ P(-2) \leq 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ceci se résume en $a \cdot P(-2) \geq 0$.

(1):

$$\Delta = m^2 + 4m(m+1) > 0$$

$$\iff m(5m+4) > 0$$

$$\iff m \in]-\infty, -4/5[\cup]0, +\infty[$$

$$S_1 =]-\infty, -4/5[\cup]0, +\infty[.$$

(2):

$$m \cdot P(1) < 0 \iff m[m - m - (m + 1)] < 0$$

$$\iff -m(m + 1) < 0$$

$$\iff m \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$S_2 =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

(3):

$$m \cdot P(-2) \geq 0 \iff m[m(-2)^2 - m(-2) - (m + 1)] \geq 0$$

$$\iff m(5m - 1) \geq 0$$

$$\iff m \in]-\infty, 0[\cup [1/5, +\infty[$$

$$S_3 =]-\infty, 0[\cup [1/5, +\infty[$$

(On exclut 0 à cause de l'hypothèse $m \neq 0$.)

Maintenant, on doit intersecter les trois domaines de m obtenus pour trouver les valeurs de m souhaitées:

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

$$= \left(]-\infty, -4/5[\cup]0, +\infty[\right) \cap \left(]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\right) \cap \left(]-\infty, 0[\cup [1/5, +\infty[\right)$$

$$=]-\infty, -1[\cup [1/5, +\infty[.$$