17.10.22

La formule pour le binôme de Newton

Le but de cette note est de montrer la formule pour le binôme de Newton. Celle-ci donne le développement de la puissance $(a+b)^n$ pour $a,b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Avant de donner une preuve de cette formule, il est avantageux d'établir certaines

Conventions et notations:

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a^n = \begin{cases} \prod_{k=1}^n a, & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$ On admet donc, que $0^0 = 1$.
- $\forall n,m\in\mathbb{N},\ m\leq n,\ \binom{n}{m}:=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$ On utilise ici aussi la convention que 0!=1.

Observons que le nombre $\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$ est le nombre de manières qu'il existe de choisir m éléments d'un ensemble à n éléments. En effet, pour choisir m éléments d'un ensemble E à n éléments, on commence par en choisir un premier. Il existe n façons de ce faire. Puis, pour choisir le deuxième, il reste n-1 éléments de E, l'élément choisi au départ n'étant plus à disposition. Par suite, il existe donc $n(n-1)\dots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$ manière de choisir ces m éléments. Mais, il faut encore diviser par l'ordre des m éléments choisis : en effet, le choix de $\{1,3\}$ est en fait le même que le choix de $\{3,1\}$ dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. On arrive donc bien au résultat, que $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ est le nombre de façons possibles qu'il existe à sélectionner m éléments parmi n, sans se soucier de l'ordre dans lequel ces m éléments ont été sélectionnés.

Commençons par un

Lemme. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 < m \le n$. Alors,

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

Démonstration. En effet,

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \frac{n!}{(n-m)!m!} + \frac{n!}{(n-m+1)!(m-1)!}$$
$$= \frac{n!(n-m+1) + n!m}{(n-m+1)!m!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1-m)!m!} = \binom{n+1}{m}.$$

Ce résultat peut se visualiser comme suit : on dispose les valeurs $\binom{n}{m}$ en forme de pyramide. Plus précisément, à la $n^{\text{\`e}me}$ ligne de la pyramide, comptée à partir de son sommet, on place le binôme $\binom{n}{m}$ à la $m^{\text{\`e}me}$ place :

On voit qu'un coefficient d'une ligne donnée égale la somme des deux coefficients de la ligne du dessus. Dans notre exemple, $\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$, i.e. 3 = 1 + 2, ou encore $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, i.e. 10 = 6 + 4.

Venons-en maintenant à l'énoncé de la formule du binôme de Newton :

Soient
$$a,b\in\mathbb{R}$$
 et $n\in\mathbb{N}$. Alors,
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Preuve par récurrence : On fixe des valeurs $a,b \in \mathbb{R}$ et on constate que

$$\frac{n=0:}{n=0:} (a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

$$\frac{n=1:}{n=0:} (a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

$$\frac{n=2:}{n=0:} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

On peut donc initialiser le raisonnement par récurrence en prenant $N_0=0,1$ ou 2. On suppose maintenant la formule vraie pour n et on aimerait montrer, qu'elle restera vraie pour n+1:

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n$$

$$=(a+b)\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad \text{(c'est ici qu'on utilise l'hypothèse de récurrence.)}$$

$$=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}+b^{n+1}.$$

L'idée maintenant est d'écrire k+1=l dans la deuxième somme : si k visite les valeurs de 0 à n-1, l visitera les valeurs de 1 à n. Il faut donc adapter les indices

de sommation de la deuxième somme de 1 à n et substituer k par l-1:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} b^l + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \quad (\text{ par le lemme précédent})$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad (\text{ où on utilise } a^0 = 1 = b^0),$$

qui est bien la formule annoncée pour n+1.

<u>Preuve combinatoire</u>: Calculer $(a+b)^n$ revient à calculer le produit de (a+b) n fois avec lui-même :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ fois}}.$$

En appliquant la distribution du produit sur l'addition on devra choisir pour chacun des termes (a+b) soit la valeur a, soit la valeur b. A chaque fois, on aura des termes du type $a^{n-k}b^k$, où k est le nombre de paranthèses pour lesquelles b a été choisi et donc n-k est le nombre de paranthèses pour lesquelles a a été choisi.

Un terme $a^{n-k}b^k$ est donc obtenu après avoir trié les n facteurs (a+b) en k facteurs pour lesquels on retient b et n-k facteurs pour lesquels on retient a. Or, il existe $\binom{n}{k}$ manières de fair le tri en question. Il en résulte donc, que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

<u>Preuve par dérivées :</u> Comme auparavant, on sait qu'après distribution du produit sur les sommes, on aura que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n c_k a^{n-k} b^k,$$

où il reste à déterminer les facteurs c_k . Cette dernière égalité peut être vue comme une égalité entre deux fonctions de b. Pour évaluer les coefficients c_k à droite, il suffit donc de dériver k fois ces deux fonctions par apport à b et égaler le résultat

_

en b = 0. En effet on obtient

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n c_k a^{n-k} b^k$$

$$\Rightarrow \frac{d^k}{db^k} (a+b)^n \big|_{b=0} = \frac{d^k}{db^k} (\sum_{j=0}^n c_j a^{n-j} b^j) \big|_{b=0}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} (a+b)^{n-k} \big|_{b=0} = (\sum_{j=k}^n c_j a^{n-j} \frac{j!}{(j-k)!} b^{j-k}) \big|_{b=0}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} = c_k a^{n-k} k! \Rightarrow c_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$