

17.10.22

La formule pour le binôme de Newton

Le but de cette note est de montrer la formule pour le binôme de Newton. Celle-ci donne le développement de la puissance $(a + b)^n$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Avant de donner une preuve de cette formule, il est avantageux d'établir certaines

Conventions et notations :

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a^n = \begin{cases} \prod_{k=1}^n a, & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On admet donc, que $0^0 = 1$.

$$\bullet \forall n, m \in \mathbb{N}, m \leq n, \binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}. \text{ On utilise ici aussi la convention que } 0! = 1.$$

Observons que le nombre $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ est le nombre de manières qu'il existe de choisir m éléments d'un ensemble à n éléments. En effet, pour choisir m éléments d'un ensemble E à n éléments, on commence par en choisir un premier. Il existe n façons de ce faire. Puis, pour choisir le deuxième, il reste $n - 1$ éléments de E , l'élément choisi au départ n'étant plus à disposition. Par suite, il existe donc $n(n - 1) \dots (n - m + 1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ manière de choisir ces m éléments. Mais, il faut encore diviser par l'ordre des m éléments choisis : en effet, le choix de $\{1, 3\}$ est en fait le même que le choix de $\{3, 1\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On arrive donc bien au résultat, que $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ est le nombre de façons possibles qu'il existe à sélectionner m éléments parmi n , sans se soucier de l'ordre dans lequel ces m éléments ont été sélectionnés.

Commençons par un

Lemme. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 < m \leq n$. Alors,

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{(n-m)!m!} + \frac{n!}{(n-m+1)!(m-1)!} \\ &= \frac{n!(n-m+1) + n!m}{(n-m+1)!m!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1-m)!m!} = \binom{n+1}{m}. \end{aligned}$$

□

Ce résultat peut se visualiser comme suit : on dispose les valeurs $\binom{n}{m}$ en forme de pyramide. Plus précisément, à la $n^{\text{ème}}$ ligne de la pyramide, comptée à partir de son sommet, on place le binôme $\binom{n}{m}$ à la $m^{\text{ème}}$ place :

de sommation de la deuxième somme de 1 à n et substituer k par $l - 1$:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} b^l + b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \quad (\text{par le lemme précédent}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad (\text{où on utilise } a^0 = 1 = b^0),
 \end{aligned}$$

qui est bien la formule annoncée pour $n + 1$. □

Preuve combinatoire : Calculer $(a+b)^n$ revient à calculer le produit de $(a+b)$ n fois avec lui-même :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \dots (a+b)}_{n \text{ fois}}.$$

En appliquant la distribution du produit sur l'addition on devra choisir pour chacun des termes $(a+b)$ soit la valeur a , soit la valeur b . A chaque fois, on aura des termes du type $a^{n-k} b^k$, où k est le nombre de parenthèses pour lesquelles b a été choisi et donc $n-k$ est le nombre de parenthèses pour lesquelles a a été choisi.

Un terme $a^{n-k} b^k$ est donc obtenu après avoir trié les n facteurs $(a+b)$ en k facteurs pour lesquels on retient b et $n-k$ facteurs pour lesquels on retient a . Or, il existe $\binom{n}{k}$ manières de faire le tri en question. Il en résulte donc, que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. □

Preuve par dérivées : Comme auparavant, on sait qu'après distribution du produit sur les sommes, on aura que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n c_k a^{n-k} b^k,$$

où il reste à déterminer les facteurs c_k . Cette dernière égalité peut être vue comme une égalité entre deux fonctions de b . Pour évaluer les coefficients c_k à droite, il suffit donc de dériver k fois ces deux fonctions par rapport à b et égaliser le résultat

en $b = 0$. En effet on obtient

$$\begin{aligned}\forall b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n c_k a^{n-k} b^k \\ \Rightarrow \quad \frac{d^k}{db^k} (a+b)^n \Big|_{b=0} &= \frac{d^k}{db^k} \left(\sum_{j=0}^n c_j a^{n-j} b^j \right) \Big|_{b=0} \\ \Rightarrow \quad \frac{n!}{(n-k)!} (a+b)^{n-k} \Big|_{b=0} &= \left(\sum_{j=k}^n c_j a^{n-j} \frac{j!}{(j-k)!} b^{j-k} \right) \Big|_{b=0} \\ \Rightarrow \quad \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} &= c_k a^{n-k} k! \Rightarrow c_k = \frac{n!}{(n-k)! k!}.\end{aligned}$$

□