

Le théorème de la convergence monotone

Le but de cette note est de montrer le théorème de la convergence monotone. Rappelons que chaque nombre réel positif peut se représenter par une écriture décimale $d_0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots$ avec $d_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Réciproquement, toute écriture décimale correspond à un nombre réel positif.

La signification d'une telle écriture décimale est claire quand les décimales égalent 0 à partir d'un rang n : si $d_0^x, d_1^x d_2^x d_3^x d_4^x d_5^x \dots$ est l'écriture décimale pour le nombre x , et si $d_k^x = 0$ pour tout $k > n$, alors

$$x = \sum_{k=0}^n d_k^x \frac{1}{10^k} = d_0^x + \frac{d_1^x}{10} + \dots + \frac{d_n^x}{10^n}.$$

Rappelons aussi la relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+$: si $x, y \in \mathbb{R}_+$ sont représentés par leur écritures décimales respectives $d_0^x, d_1^x d_2^x d_3^x d_4^x d_5^x \dots$ et $d_0^y, d_1^y d_2^y d_3^y d_4^y d_5^y \dots$, alors $x \leq y$ si et seulement si pour tout rang $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n d_k^x \frac{1}{10^k} \leq \frac{1}{10^n} + \sum_{k=0}^n d_k^y \frac{1}{10^k}.$$

Par exemple, $x = 1,13$ représente un nombre strictement plus grand que $y = 1,12$ et en passant en revue les rangs on a en effet

$$1 \leq 1 + 1, \quad \frac{11}{10} \leq \frac{1}{10} + \frac{11}{10}, \quad \frac{112}{100} \leq \frac{1}{100} + \frac{113}{100}, \quad \frac{1120}{1000} \leq \frac{1}{1000} + \frac{1130}{1000}, \dots$$

Il est par contre nécessaire d'ajouter le terme $\frac{1}{10^n}$ à la somme de droite comme le montre l'exemple bien connu de $0,999999\dots$ qui représente (aussi) le nombre réel 1. En effet, la relation $1 \leq 0,999999\dots$ doit être vérifiée et en passant à nouveau les rangs en revue, on a

$$1 \leq 1 + 0, \quad \frac{10}{10} \leq \frac{1}{10} + \frac{9}{10}, \quad \frac{100}{100} \leq \frac{1}{100} + \frac{99}{100}, \quad \frac{1000}{1000} \leq \frac{1}{1000} + \frac{999}{1000}, \dots$$

Pour déterminer si $x \leq y$, on peut aussi comparer x avec l'écriture décimale de y . En effet, on a le

Lemme. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Alors $x \leq y$ si et seulement si pour tout rang n on a

$$x \leq \frac{1}{10^n} + \sum_{k=0}^n \frac{d_k^y}{10^k}.$$

Démonstration. Par définition de la relation d'ordre sur les écritures décimales :

$$\begin{aligned}
 x \leq y &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \frac{d_k^x}{10^k} \leq \frac{1}{10^n} + \sum_{k=0}^n \frac{d_k^y}{10^k} \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n+m} \frac{d_k^x}{10^k} \leq \frac{1}{10^{n+m}} + \sum_{k=0}^{n+m} \frac{d_k^y}{10^k} \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n+m} \frac{d_k^x}{10^k} \leq \frac{1}{10^{n+m}} + \sum_{k=0}^n \frac{d_k^y}{10^k} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{9}{10^k} \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x \leq \frac{1}{10^n} + \sum_{k=0}^n \frac{d_k^y}{10^k},
 \end{aligned}$$

puisque $0, d_1^y d_2^y \dots d_n^y 999 \dots$ est une écriture décimale pour $\frac{1}{10^n} + \sum_{k=0}^n \frac{d_k^y}{10^k}$. $\square$

La relation d'ordre sur les écritures décimales étant rappelée, on peut maintenant énoncer et prouver le **théorème de la convergence monotone** :

Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ réelle, bornée, positive et croissante converge vers une limite $L \in \mathbb{R}_+$.
De plus, cette limite est le plus petit majorant de la suite.

La preuve de ce théorème présentera quatre parties : la première où l'on construit cette limite L , la deuxième où l'on montre que L majore la suite en question, une troisième où l'on montre que L est le plus petit majorant de cette suite et finalement la dernière partie, où l'on montre que $\lim_n x_n = L$.

Construction de L : La construction de L sera achevée si on arrive à exhiber son écriture décimale. Celle ci est construite rang par rang. Pour la partie entière d_0^L de L on considère l'ensemble $\{d_0^{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ des parties entières des éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il doit exister un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n < N$. On pose alors d_0^L comme étant le plus grand naturel qui ne majore pas tous les éléments de la suite, i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_0^L + 1 \geq x_n \quad \text{et} \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } d_0^L < x_n.$$

Puis on applique la même idée aux décimales successives de L : la décimale de L de rang m est le nombre $d_m^L \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d_k^L}{10^k} + \frac{d_m^L + 1}{10^m} \geq x_n \quad \text{et} \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d_k^L}{10^k} + \frac{d_m^L}{10^m} < x_n.$$

On obtient alors clairement une écriture décimale $d_0^L, d_1^L d_2^L d_3^L d_4^L d_5^L d_6^L \dots$ qui correspondra à un nombre réel L .

L majore la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: Par construction de la suite décimale qui représente L , on a pour tout x_n et tout rang m

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{d_k^L}{10^k} + \frac{d_m^L + 1}{10^m} \geq x_n \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^m \frac{d_k^L}{10^k} + \frac{1}{10^m} \geq x_n.$$

Par le lemme précédent, ceci implique que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq L$.

L est le plus petit majorant de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: Soit $M \in \mathbb{R}_+$ et supposons que $M < L$. Montrons alors que M ne majore pas la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Puisque par hypothèse on a $M < L$, cela veut dire qu'il n'est pas vrai de dire que $M \geq L$, et par définition de l'ordre sur les écritures décimales, ceci implique

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \sum_{k=0}^m \frac{d_k^L}{10^k} > \frac{1}{10^m} + \sum_{k=0}^m \frac{d_k^M}{10^k}.$$

Mais par définition de la construction de l'écriture décimale de L , il existe un élément x_n de la suite tel que $x_n > \sum_{k=0}^m \frac{d_k^L}{10^k}$ et donc que $x_n > \frac{1}{10^m} + \sum_{k=0}^m \frac{d_k^M}{10^k}$. Par le lemme précédent, ceci veut alors dire, que $x_n \leq M$ est faux, et donc que $x_n > M$. M ne majore donc pas la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

L est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: par définition de la limite, pour un $\epsilon > 0$ donné, il doit exister un $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$n \geq N_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| < \epsilon.$$

Puisque L est le plus petit majorant de la suite, on a que $L - \epsilon$ ne la majore plus mais que $L + \epsilon$ la majore (à fortiori). On doit donc avoir un x_{N_ϵ} de la suite avec $L - \epsilon < x_{N_\epsilon} < L + \epsilon$. Puisque la suite est croissante mais (strictement) majorée par $L + \epsilon$, on aura

$$\forall n \geq N, \quad L - \epsilon < x_n < L + \epsilon.$$

□