

Comprendre la convergence

La définition de la convergence peut aussi s'approcher par la négation de celle-ci : Dire qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne converge pas** vers un nombre réel $l \in \mathbb{R}$ signifie, que les éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vont rester loin de l .

Ici il faut s'entendre sur ce qu'on comprend par "rester loin de l ". En fait, il suffit de dire que les éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vont rester à une certaine distance de l et ne vont pas s'en approcher plus. On peut donc dire qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne converge pas** vers un nombre réel $l \in \mathbb{R}$ si il existe un nombre $\epsilon > 0$, tel que les éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient en dehors de l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

On peut même affaiblir un peu cette définition : en fait la suite

$$1, -1, 1, -1, 1 - 1, \dots$$

de terme général $(-1)^n$ ne converge pas vers $l = 1$. Cela peut s'exprimer en disant qu'il existe un $\epsilon > 0$ (par exemple $\epsilon = \frac{1}{2}$) tel qu'une infinité d'éléments de la suite (en fait tout les termes $(-1)^{2n+1}$) se trouvent à l'extérieur de l'intervalle $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$ (en fait donc dans l'exemple $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$).

On peut donc poser la

Définition. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne converge pas** vers un nombre réel $l \in \mathbb{R}$ si il existe un nombre $\epsilon > 0$, tel qu'une infinité d'éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient en dehors de l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

Plus formellement :

$$\exists \epsilon > 0, \text{ t.q. } |l - a_n| \geq \epsilon \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}.$$

La définition d'une suite convergente vers un nombre réel l n'est donc autre que la négation de la définition d'une suite qui ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$. Autrement dit :

Définition. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un nombre réel $l \in \mathbb{R}$ si pour tout nombre $\epsilon > 0$, un nombre fini seulement d'éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouvent en dehors de l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

Plus formellement :

$$\forall \epsilon > 0, |l - a_n| \geq \epsilon \text{ pour un nombre fini de } n \in \mathbb{N}.$$

Comme il y a selon cette définition un nombre fini seulement d'éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui se trouvent en dehors de l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$, on peut en faire la liste. Comme celle-ci est finie, il doit exister un dernier élément de cette liste, disons a_{N_0} .

Dire qu'un nombre fini d'éléments de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouvent en dehors de l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$ veut donc dire, que si $n > N_0$, alors a_n se trouve dans l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

On arrive ainsi enfin à la définition du cours de la convergence d'une suite :

Définition. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un nombre réel $l \in \mathbb{R}$ si pour tout nombre $\epsilon > 0$, il existe un nombre $N_0 \in \mathbb{N}$, à partir duquel tous les éléments de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouvent dans l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

Plus formellement :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n > N_0 \text{ implique } |l - a_n| < \epsilon.$$

