

Série 6 - Exercices supplémentaires

Exercice 1. On considère l'application :

$$f :]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2-4}.$$

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$. En déduire que f est surjective. Est-elle injective ?
- Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a : $\left|1 - \sqrt{1+16y^2}\right| < 4|y| < 1 + \sqrt{1+16y^2}$.
- Montrer que la restriction de f fournit une bijection de $] - 2, 2[$ sur $\mathbb{R}$ et décrire la bijection réciproque.

Exercice 2. On donne les ensembles $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $F = \{\varepsilon, \zeta, \eta\}$.

- Combien existe-t-il d'applications de E dans F ? Parmi celles-ci, y a-t-il des surjections ?
- Calculer le nombre d'applications de E dans F dont l'image directe est exactement égale à $\{\varepsilon, \zeta\}$.
- Déterminer le nombre de surjections de E dans F . *Indication : s'intéresser aux applications non surjectives et utiliser b.*

Exercice 3. Est-il vrai que, pour tout choix d'ensembles E et F et tout choix d'applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ on a :

- $f \circ g$ surjective $\Rightarrow f$ surjective ?
- f surjective $\Rightarrow f \circ g$ surjective ?
- g surjective $\Rightarrow f \circ g$ surjective ?

Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si :

$$\forall A \subset E, \quad \mathbb{C}_F(f(A)) \subset f(\mathbb{C}_E(A)).$$

Exercice 5. (Facultatif) On donne une application $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E vers son ensemble des parties. Montrer que f n'est pas surjective en étudiant l'ensemble des antécédents de A par f , où :

$$A = \{x \in E, x \notin f(x)\}.$$

Ce résultat constitue le *théorème de Cantor*.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : c. $\mathbb{R} \rightarrow]-2, 2[$, $y \rightarrow 0$ si $y = 0$, $\frac{1-\sqrt{1+16y^2}}{2y}$ si $y \neq 0$.

Ex. 2 : a. 81, oui, b. 14, c. 36.

Ex. 3 : a. vrai, b. faux, c. faux.