Série 5 - Exercices supplémentaires

Exercice 1. On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \frac{x+1}{x^2+1}.$$

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. Combien possède-t-il d'éléments ?

b. L'application f est-elle injective ? Qu'en est-il de sa restriction à $[0, +\infty[$?

c. Montrer que la restriction de f à $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$ est injective.

Exercice 2. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, où f et g sont les applications définies par :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \to \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ n \to \begin{cases} 2n \text{ si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si :

$$\forall A, B \subset E, \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercice 4. On donne deux ensembles finis E et F possédant respectivement p et n éléments.

a. S'il existe une application injective $f : E \to F$, montrer que $p \leqslant n$. *Indication : que peut-on dire de* $f(E)$ *?*

b. Sous cette condition, combien existe-t-il d'applications injectives de E dans F ? *Indication : on pourra commencer par résoudre la question dans un cas où* p *et* n *sont "petits".*

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. 1 si $x \in \{-1-\sqrt{2}, -1, -1+\sqrt{2}\}$, 2 sinon, b. non injectives.
Ex. 2 : $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.
Ex. 4 : b. $\frac{n!}{(n-p)!}$.