Série 4 - Exercices supplémentaires

Exercice 1. On considère l'application :

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z},\ (p, q) \to 4p + 6q.$$

a. Que vaut l'image de $(2, -1)$ par f ?

b. Déterminer les antécédents de 0 par f, puis ceux de 1.

c. Montrer que $f(\mathbb{Z}^2)$ est l'ensemble des entiers relatifs pairs.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = [\alpha, +\infty[$. On donne aussi l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to -2x^2 + 4x + 3.$$

a. Etant donné $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$. Expliciter ensuite l'image directe de $\mathbb{R}$ par f.

b. Supposons que $\alpha \leqslant 1$. Montrer alors que tout élément de $f(\mathbb{R})$ possède (au moins) un antécédent dans A.

c. Identifier le sous-ensemble $f(A)$. *Indication : discuter selon que $\alpha \leqslant 1$ ou $\alpha > 1$ et utiliser le résultat du b.*

d. Déterminer tous les réels β tels que $f(]-\infty, \beta]) = f(A)$.

Exercice 3. Est-il vrai que, pour tout choix d'ensemble E, d'application $f : E \to E$ et de sous-ensembles A, B de E, on a :

a. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

b. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

c. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?

d. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$?

Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Dans chacun des cas, quelle est la propriété portant sur $y \in F$ décrite par l'énoncé proposé ?

a. $\forall x \in E,\ f(x) \neq y$ b. $\forall x \in E,\ f(x) = y$ c. $\exists x \in E,\ f(x) = y$ d. $\exists x \in E,\ f(x) \neq y$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. 2, b. $\{(-3k, 2k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\varnothing$.

Ex. 2 : a. $]-\infty, 5]$, c. $]-\infty, 5]$ si $\alpha \leqslant 1$, $]-\infty, -2\alpha^2 + 4\alpha + 3]$ sinon, d. $\beta \geqslant 1$ si $\alpha \leqslant 1$, $\beta = 2 - \alpha$ sinon.

Ex. 3 : a. Vrai, b. Faux, c. Vrai, d. Vrai.