

Série 3 - Exercices supplémentaires

Exercice 1. Combien vaut le coefficient de x^2yz^4 dans le développement de :

$$(x - y + 2z)^7 ?$$

Exercice 2. On donne l'ensemble $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta\}$. Combien E possède-t-il de sous-ensembles A vérifiant :

$$\text{Card}(A) = 5 \quad \text{et} \quad (\varepsilon, \zeta) \notin A \times A?$$

Exercice 3. Etant donnés deux entiers n et k vérifiant $n \geq 4$ et $2 \leq k \leq n - 2$, on souhaite montrer la relation :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

- Comment cette relation se voit-elle sur le triangle de Pascal ?
- Montrer la formule voulue par le calcul. *Indication : penser au lien entre un coefficient et ses deux "parents".*
- Prouver la formule en procédant par dénombrement à la manière de l'exercice 6 de la série 3.

Exercice 4. Dans cet exercice, on souhaite montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

- Montrer que, si $1 \leq k \leq n$, alors on a :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

- Prouver l'égalité voulue en utilisant le résultat du a.
- Montrer la formule annoncée en comptant de deux manières le nombre d'éléments de l'ensemble :

$$\{(x, A) \mid A \subset E \text{ et } x \in A\},$$

où E est un ensemble fini de cardinal n .

Éléments de réponse :

Ex. 1 : -1680 .

Ex. 2 : 36 .