

Série 2 - Exercices supplémentaires

Exercice 1. On considère l'énoncé suivant :

"Si un produit de deux entiers naturels est pair, alors l'un (au moins) des deux est pair".

- Ecrire cet énoncé à l'aide de symboles mathématiques.
- Montrer que l'énoncé est vrai en raisonnant par contraposée.
- La réciproque de cet énoncé est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
- Mêmes questions a., b. et c. mais avec l'énoncé :

"Si un réel x vérifie l'équation $x^4 - 3x + 1 = 0$, alors x est compris (strictement) entre 0 et 2".

Exercice 2. On considère l'énoncé suivant :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in [-1, 0], x \leq y \Rightarrow y^2 \leq \frac{1}{2}.$$

- Ecrire en toutes lettres l'énoncé donné. Est-il vrai ou faux ?
- Ecrire la négation de l'énoncé à l'aide de symboles mathématiques.
- Mêmes questions a. et b. mais avec l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbb{N}, (\exists y \in \mathbb{N}, xy = 48) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N}, xz = 24).$$

Exercice 3. On donne un ensemble E . Montrer que :

$$\forall A, B, C \text{ sous-ensemble de } E, \quad (A \cup B \subset C) \Leftrightarrow (A \subset C \text{ et } B \subset C).$$

Exercice 4. On donne un ensemble E . Montrer que :

$$\forall A, B, C \text{ sous-ensemble de } E, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 5. Montrer que, pour tout choix de sous-ensembles A et B d'un même ensemble E , on a :

$$(A \cup B \subset A \cap B) \Leftrightarrow A = B.$$

Exercice 6. On donne l'ensemble $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Est-il vrai que, pour tout choix de sous-ensembles A, B, C de E , on a :

- $A \not\subset B \Rightarrow A \subset \complement_E(B)$?
- $(A \cap B \neq \emptyset \text{ et } A \cap C \neq \emptyset) \Rightarrow B \cap C \neq \emptyset$?
- $A \cap \complement_E(B) \subset C \Rightarrow \complement_E(A) \cup B \cup C = E$?

Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : c. Vrai pour le premier énoncé, Faux pour le deuxième.

Ex. 2 : a. Vrai pour le premier énoncé, Faux pour le deuxième.

Ex. 6 : a. Faux, b. Faux, c. Vrai.