

Série 1 - Exercices supplémentaires

Exercice 1. Dans chacun des cas, écrire l'énoncé donné à l'aide de symboles mathématiques. Est-il vrai ou faux ?

- a. Il existe un nombre réel dont le carré est strictement négatif.
- b. L'équation $x^2 + 2x = 3$ en $x \in \mathbb{R}$ n'a aucune solution dans l'intervalle $[2, +\infty[$.
- c. Le seul nombre réel non nul qui est égal à son inverse est 1.

Exercice 2. L'énoncé proposé est-il vrai ou faux ? Ecrire sa négation à l'aide de symboles mathématiques.

- a. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 0$
- b. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = 2x$
- c. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + yx = 1$

Exercice 3. On considère les trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{N}$:

$$A = \{x \in \mathbb{N}, 4 \text{ divise } x\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ divise } 60\}, \quad C = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 17\}.$$

Dans chacun des cas, expliciter le sous-ensemble proposé.

- a. $A \cap B$
- b. $B \cap \mathbb{C}_{\mathbb{N}}(C)$
- c. $(A \cup B) \cap C$
- d. $A \cap \mathbb{C}_{\mathbb{N}}(B) \cap C$.

Exercice 4. On s'intéresse à la propriété suivante portant sur un entier naturel $x \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} : \exists y \in \mathbb{N}, x^2 + x = 2y.$$

- a. Pour tout x compris entre 0 et 5, déterminer si x vérifie $\mathcal{P}$ ou non.
- b. En justifiant votre résultat, expliciter le sous-ensemble $A = \{x \in \mathbb{N}, \mathcal{P} \text{ est vérifiée par } x\}$ de $\mathbb{N}$ défini par la propriété $\mathcal{P}$.
- c. Mêmes questions que a. et b. mais avec la propriété :

$$\mathcal{Q} : \exists y \in \mathbb{N}, x^2 + 2x = 3y.$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. Faux, b. Vrai, d. Faux.

Ex. 2 : a. Faux, b. Vrai, c. Vrai.

Ex. 3 : a. $\{4, 12, 20, 60\}$, b. $\{20, 30, 60\}$, c. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16\}$, d. $\{0, 8, 16\}$.

Ex. 4 : b. $A = \mathbb{N}$.