Notation de sommation

Étant donné une suite de nombres réels $a_0, a_1, a_2 \ldots$, on a la notation succincte suivante pour la somme des premiers $n+1$ termes de cette suite:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Par exemple,

- $\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
- $\sum_{k=0}^{4} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- $\sum_{k=0}^{n} 3k = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3(n-1) + 3n$
- $\sum_{k=0}^{2} 3k = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$
- $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$
- $\sum_{k=0}^{3} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

On remarque que la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$ possède $n+1$ termes.

On peut aussi commencer la somme par un indice autre que 0. Par exemple, $\sum_{k=2}^{5} k = 2 + 3 + 4 + 5 = 10$.

Voici quelques propriétés de cette notation.

- $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i$
- $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$
- $c \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} c a_k$
- $\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1$
- $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n$
- $\sum_{k=0}^{n} c = (n+1) \cdot c$
- $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$
- $(\sum_{k=0}^{n} a_k) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_k b_j\right)$

En particulier, remarquons que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \neq \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 \neq \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$