Série 6

Exercice 1. Dans chacun des cas, déterminer l'image directe de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée. f est-elle surjective ?

a. $x \to -x$ b. $x \to \cos(x) + 1$ c. $x \to 2x - |x|$.

Exercice 2. On considère l'application :

$$f :]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \to \frac{x^2}{x+1}.$$

a. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$. Combien possède-t-il d'éléments ?

b. Identifier l'image directe de f. L'application f est-elle surjective ?

c. Montrer que f induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même et donner la bijection réciproque.

Exercice 3. On donne $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ et l'application $f : E \to E$ définie par :

$$f(\alpha) = \varepsilon,\ f(\beta) = \delta,\ f(\gamma) = \alpha,\ f(\delta) = \varepsilon \text{ et } f(\varepsilon) = \beta.$$

a. L'application f est-elle surjective ?

b. Déterminer un sous-ensemble A de E tel que f induit une bijection de A sur $f(E)$.

c. Trouver un sous-ensemble non vide B de E tel que f induit une bijection de B sur B.

Exercice 4. On considère l'application suivante $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et le sous-ensemble suivant A de $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x, y) \to (x + y, xy) \quad \text{et} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant y\}.$$

a. Calculer l'image de $(1, 2)$ et l'ensemble des antécédents de $(2, -3)$ par f.

b. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par f.

c. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u^2 \geqslant 4v\}$.

d. Montrer que f induit une bijection de A sur $f(\mathbb{R}^2)$ et décrire la bijection réciproque.

Exercice 5. On considère l'application :

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N},\ (n, p) \to |2n + 3p|\,.$$

a. Calculer $f(-1, 1)$. En déduire un antécédent de 2 par f.

b. Montrer que f est surjective. *Indication : utiliser les calculs effectués au a.*

c. f restreinte à $\mathbb{N}^2$ est-elle surjective ? Expliciter son image $f(\mathbb{N}^2)$.

Exercice 6. Vrai ou faux ? Justifier. Pour tout choix d'applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

a. si f et g sont surjectives, alors l'application $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to f(x)g(x)$ est surjective.

b. si l'application $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to f(x) + g(x)$ est surjective, alors f ou g est surjective.

c. si f et g sont surjectives, alors l'application $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (f(x), g(y))$ est surjective.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. surjective, b. non surjective, c. surjective.
Ex. 2 : a. 0 si $y \in]-4, 0[$, 1 si $y \in \{-4, 0\}$, 2 sinon, b. $]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$, non, c. $y \to \frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}$.
Ex. 3 : a. non.
Ex. 4 : a. $(3, 2)$, $\{(-1, 3), (3, -1)\}$, d. $(u, v) \to (\frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2}, \frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2})$.
Ex. 5 : a. 1, c. non.
Ex. 6 : a. faux, b. faux, c. vrai.