

Série 5

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective. Justifier.

a. $x \rightarrow 2x + 1$

b. $x \rightarrow 2 \cos(x) - \sin(2x)$

c. $x \rightarrow x^3$.

Exercice 2. On donne $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $F = \{\varepsilon, \zeta, \eta\}$, ainsi que les applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ définies par :

$$f(\alpha) = \eta, f(\beta) = f(\gamma) = \varepsilon, f(\delta) = \zeta \text{ et } g(\varepsilon) = \delta, g(\zeta) = \beta, g(\eta) = \alpha.$$

- Déterminer l'application $f \circ g$. Est-elle injective ?
- Même question avec l'application $g \circ f$.
- Lister tous les sous-ensembles non vides A de E tels que la restriction de f à A est injective. Combien y en a-t-il ?

Exercice 3. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow \left(\frac{x}{2+x^2}, x^2 - 3x \right).$$

- Déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de $(\frac{1}{3}, -2)$ par f . L'application f est-elle injective ?
- Montrer que f restreinte à $] -\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ est injective.

Exercice 4. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow -x^2 - 4x - 7.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. L'application f est-elle injective ? Et qu'en est-il de $f \circ f$?
- Identifier l'image directe de $\mathbb{R}$ par f . La restriction de f à $f(\mathbb{R})$ est-elle injective ?
- Soit $z \in \mathbb{R}$. Montrer que f restreinte à $] -\infty, z[$ est injective si et seulement si $z \leq -2$.

Exercice 5. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^3 - 3x.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. L'application f est-elle injective ?
- Montrer que, si $x > 1$, alors $f(x)$ possède un unique antécédent par f dans $]1, +\infty[$.
- L'application f restreinte à $[1, +\infty[$ est-elle injective ? Justifier.

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si :

$$\forall A \subset E, \quad f(\mathcal{C}_E(A)) \subset \mathcal{C}_F(f(A)).$$

Indication : raisonner par double implication et pour " $\Leftarrow$ ", utiliser le cas particulier $A = \{x\}$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. injective, b. non injective, c. injective.

Ex. 2 : a. oui, b. non, c. 11.

Ex. 3 : a. $\{1, 2\}$, non.

Ex. 4 : a. $\{x, -4 - x\}$, les deux sont non injectives, b. $] -\infty, -3]$, oui.

Ex. 5 : a. non, c. oui.