Série 2

Exercice 1. On considère l'énoncé suivant : "Le carré d'un entier naturel différent de 1 est aussi différent de 1".

a. Exprimer cet énoncé à l'aide de symboles mathématiques (dont le symbole d'implication). Est-il vrai ou faux ?

b. Ecrire la négation de l'énoncé, avec des symboles d'abord, puis en toutes lettres.

c. Mêmes questions a. et b. mais avec l'énoncé suivant :

"Si un produit de deux réels est positif ou nul, alors l'un de ces réels est positif ou nul".

Exercice 2. On considère l'énoncé suivant : "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$".

a. Ecrire cet énoncé en toutes lettres. Est-il vrai ou faux ?

b. Ecrire l'énoncé réciproque, à l'aide de symboles d'abord, puis en toutes lettres. Est-il vrai ou faux ?

c. Mêmes questions a. et b. mais avec l'énoncé suivant : "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x > 0 \text{ ou } y > 0) \Rightarrow x + y > 0$".

Exercice 3. On s'intéresse aux propriétés suivantes portant sur un entier naturel $x \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} : \exists y \in \mathbb{N},\ x = 3y \qquad\qquad \mathcal{Q} : \exists z \in \mathbb{N},\ x^2 = 3z.$$

a. Déterminer parmi les entiers x compris entre 0 et 6 ceux qui vérifient $\mathcal{P}$ et ceux qui vérifient $\mathcal{Q}$. Qu'observez-vous ?

b. Montrer l'énoncé "$\forall x \in \mathbb{N},\ (x \text{ vérifie } \mathcal{P}) \Rightarrow (x \text{ vérifie } \mathcal{Q})$" après l'avoir traduit en toutes lettres.

c. Ecrire l'énoncé réciproque de celui introduit au b. puis montrer qu'il est vrai, en raisonnant par contraposée.

Exercice 4. On donne un ensemble E et on souhaite montrer que l'énoncé suivant est vrai :

$$\forall A, B, C \text{ sous-ensemble de } E, \quad (A \subset B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } A \subset C).$$

a. Montrer l'implication "$\Rightarrow$", en revenant aux définitions de l'inclusion et de l'intersection de sous-ensembles.

b. De la même manière, montrer l'implication réciproque "$\Leftarrow$".

c. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? Justifier par une démonstration ou un contre-exemple :

$$\forall A, B, C \text{ sous-ensemble de } E, \quad (A \subset B \cup C) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } A \subset C).$$

Exercice 5. On donne un ensemble E et on souhaite montrer que l'énoncé suivant est vrai :

$$\forall A, B, C \text{ sous-ensemble de } E, \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

a. Dans le cas particulier où $A = C$, identifier les sous-ensembles de part et d'autre de l'égalité et constater qu'ils coïncident.

b. Prouver le résultat voulu dans le cas général . *Indication : raisonner par double inclusion.*

Exercice 6. On donne un ensemble E ainsi que deux sous-ensembles A et B.

a. Faire un schéma représentant E, A et B.

b. Placer le sous-ensemble $(A \cap B) \cup (\complement_E(A) \cap B)$ sur votre schéma. Qu'observez-vous ? Montrer formellement votre résultat.

c. Même question b. mais avec le sous-ensemble $A \cap (\complement_E(A) \cup B)$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. Vrai, c. Faux.
Ex. 2 : a. Faux, b. Vrai, c. Faux, Vrai.
Ex. 4 : c. Faux (en général).
Ex. 5 : a. on trouve A des deux côtés de l'égalité.
Ex. 6 : b. le sous-ensemble proposé est en fait égal à B.