Série 1

Exercice 1. On considère l'énoncé suivant : "12 est un nombre pair".

a. Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

b. L'écrire à l'aide de symboles mathématiques.

c. Mêmes questions a. et b. avec l'énoncé "Tout nombre réel est inférieur ou égal à son carré".

Exercice 2. On considère l'énoncé suivant : "$\exists x \in \mathbb{R},\, x^2 = 17$".

a. Ecrire cet énoncé en toutes lettres. Est-il vrai ou faux ?

b. Ecrire la négation de cet énoncé, avec des symboles d'abord, puis en toutes lettres.

Exercice 3. On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R},\, x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R},\, x > 1 \text{ et } x < 4\}.$$

a. Représenter les ensembles A et B sur la droite des réels.

b. Ecrire chacun des ensembles A et B comme intervalle ou réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

c. Mêmes questions a. et b. mais pour les sous-ensembles $A \cup B$ et $A \cap \complement_{\mathbb{R}}(B)$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{N}$:

$$A = \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}.$$

a. Donner quelques-uns des premiers termes sous-entendus par les pointillés dans la description de A.

b. Ecrire le sous-ensemble A à l'aide d'une propriété caractéristique portant sur les entiers naturels.

c. Mêmes questions a. et b. avec le sous-ensemble $B = \{2, 5, 10, 17, 26, \ldots\}$ de $\mathbb{N}$.

Exercice 5. On donne un ensemble à 4 éléments $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Dans chacun des cas suivants, écrire la liste de tous les sous-ensembles A de E vérifiant la condition donnée. Combien y en a-t-il ?

a. $\operatorname{Card} A = 2$ b. $\{\alpha\} \subset A \subset \complement_E(\{\beta\})$ c. $\operatorname{Card}(A \cup \{\gamma, \delta\}) = 3$.

Exercice 6. On donne un ensemble E ainsi que deux sous-ensembles A et B vérifiant $\complement_E(A) \subset B$.

a. Faire un dessin représentant E, A et B (diagramme de Venn).

b. Montrer que $A \cup B = E$. *Indication : prendre un $x \in E$ quelconque et montrer qu'il appartient à A ou à B.*

c. Montrer que $\complement_E(B) \subset A$. *Indication : utiliser le résultat montré au b.*

Exercice 7. (Facultatif) Soit E un ensemble non vide et A un sous-ensemble de E. Dans chacun des cas ci-dessous, quelle conclusion simple sur A se cache sous l'énoncé proposé ?

a. $\exists x \in E, x \notin A$ b. $\exists x \in A,\, \forall y \in A,\, x = y$ c. $\forall x \in E,\, \forall y \in A,\, x \neq y$ d. $\exists x \in A,\, \exists y \in A,\, x \neq y$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. Vrai, c. Faux.
Ex. 2 : a. Vrai.
Ex. 3 : b. $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$, $]1, 4[$, c. $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$, $]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$.
Ex. 5 : a. 6, b. 4, c. 8.