

## Motivation

Le but est de décrire le comportement des systèmes mécaniques autour de leur position d'équilibre stable. Si on calcule l'énergie potentielle d'un système mécanique stable, on constate que ça correspond à un minimum de la surface énergétique. Ici, nous étudions le comportement de systèmes en 1D. Nous allons regarder les systèmes suivants :

1. Oscillateur harmonique
2. Oscillateur harmonique amorti : régimes oscillatoire, amorti, amorti critique
3. Oscillateur amorti forcé. Résonance
4. Considérations énergétiques
5. Oscillateurs couplés, battement

Ce document n'est pas un polycopié, juste une collection de formules utiles avec un peu de texte explicatif. Les personnes intéressées peuvent trouver les explications plus détaillées dans les livres suivants :

1. Alonso-Finn : Physique générale, tome 1 : Mécanique et thermodynamique - Cours et exercices corrigés (ISBN 978-2100082094)
2. Serway and Jewett : Physics for Scientists and Engineers : with Modern Physics [Anglais] (ISBN 978-1439048757)
3. Jean-Philippe Ansermet : Mécanique (ISBN 978-2880748296)

Le bon usage de ce document est de vérifier et refaire chaque étape de calcul. Le but n'est pas de mémoriser les équations finales, mais de comprendre et de savoir reproduire les équations de départ et le chemin qui mène aux équations finales. Ainsi, vous serez également capable de résoudre aussi des problèmes qui ne sont pas identiques, mais similaires.

# Oscillateur harmonique

L'énergie potentielle d'un système mécanique près de sa position d'équilibre peut être approximé par les premiers termes de sa série Taylor :

$$E(x) \approx E_0 + \left. \frac{dE}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2E}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 \quad (1)$$

Comme le second terme du côté droit de l'équation est nul (nous sommes au minimum), c'est le terme quadratique en  $x - x_0$  qui détermine le comportement du système. (Evidemment, on peut imaginer la situation où le terme quadratique est nulle, dans ce cas on parle de l'oscillateur anharmonique, qui n'est pas le sujet de nos considérations ici.)

La force est donnée par la première dérivée du potentiel :

$$F(x) = - \left. \frac{d^2E}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0) \quad (2)$$

Pour simplifier la notation, nous allons considérer  $x_0 = 0$  dans ce qui suit, cela correspond à un simple déplacement de l'origine. L'autre simplification est d'introduire la constante  $k = \left. \frac{d^2E}{dx^2} \right|_{x=x_0}$ . Cette force donne l'équation de mouvement suivante :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (3)$$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. C'est une équation différentielle linéaire, de deuxième ordre. Cela implique deux choses :

- il existe deux solutions linéairement indépendantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$
- la combinaison linéaire  $Ax_1 + Bx_2$  de ces deux solutions permet d'écrire n'importe quelle solution possible

Une des choix possibles est  $x_1(t) = \sin \omega t$  et  $x_2(t) = \cos \omega t$ . Pour que la solution soit de cette forme, il faut que

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (4)$$

et la solution générale s'écrit comme

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (5)$$

Comme ces deux fonctions harmoniques ne diffèrent que par la phase ( $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin \omega t$ ), la solution générale peut être aussi écrite sous la forme

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) \quad (6)$$

Le lecteur peut vérifier l'équivalence des deux solutions (5) et (6) en utilisant l'identité trigonométrique relevante.

## Propriétés de la solution générale

Périodicité, relation entre période, fréquence, vitesse angulaire.

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall \quad t \quad (7)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad f = \frac{1}{T} \quad (8)$$

## Conditions initiales

L'équation différentielle détermine uniquement l'accélération, et nous avons trouvés pas une, ni deux, mais un nombre infini de solutions. Parmi toutes les solutions, il faut trouver la bonne. La bonne signifie dans ce cas l'équation qui satisfait les conditions de départ. Comme l'équation différentielle est de deuxième ordre, nous pouvons fixer deux conditions, par exemple la vitesse et la position à  $t = 0$ , la position à deux instants, la vitesse à deux instants etc.

Par exemple, si la vitesse et la position à  $t = 0$  sont  $x_0$  et  $v_0$ , alors l'équation (5) implique  $B = x_0$  et  $A = v_0/\omega$ . Si on cherche la solution sous forme de (6), alors les équations à résoudre pour trouver  $C$  et  $\phi$  sont

$$x_0 = C \cos(\phi) \quad (9)$$

$$v_0 = -C\omega \sin(\phi) \quad (10)$$

## Energie de l'oscillateur harmonique

L'énergie totale est la somme de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2}kC^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mC^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kC^2 \quad (11)$$

L'énergie est donc conservée (qui n'est pas surprenant car la seule force agissant est une force conservative).

## Oscillateur harmonique amorti

En réalité, les oscillateurs perdent toujours leur énergie. Le modèle le plus simple décrivant ce phénomène est l'amortissement par force visqueuse  $-bv$ , le mouvement de la particule oscillant sera donc gouverné par deux forces :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (12)$$

Dans ce qui suit, nous allons étudier le mouvement sous l'effet de ces deux forces. Nous allons pouvoir distinguer trois régimes, selon le rapport de la force harmonique et la force visqueuse : si l'amortissement est faible, nous aurons une oscillation harmonique dont l'amplitude diminue lentement, si l'amortissement est fort, la réponse sera une relaxation.

Avant de commencer, nous allons introduire la notation complexe, qui permettra un traitement plus élégant de cette problème, et nous donnera une méthode générale pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficient constant.

## Notation complexe

La relation suivante est valable pour les fonctions trigonométriques :

$$e^{i(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi) \quad (13)$$

On peut noter qu'à tout moment, la partie réelle de l'exponentielle complexe est la solution de l'équation de mouvement de l'oscillateur harmonique. Si on calcul la dérivée de l'équation précédent, on obtient

$$i\omega e^{i(\omega t + \phi)} = -\omega \sin(\omega t + \phi) + i\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (14)$$

La partie réelle de la dérivée temporaire de l'exponentielle décrit donc la vitesse du même oscillateur. On peut également vérifier que la fonction  $e^{i(\omega t + \phi)}$  est une solution de l'équation de mouvement de l'oscillateur harmonique.

En général, la fonction exponentielle peut être utilisée dans la solution des équations différentielles linéaires.

## Amortissement faible

il est habituel de réécrire l'équation (12) et de renommer les variables pour trouver la forme suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (15)$$

Quand l'amortissement est faible, l'oscillateur amorti oscille avec une amplitude diminuant lentement. On cherche donc la solution sous forme

$$e^{-\beta t} e^{i\omega t} \quad (16)$$

avec  $\omega, \beta \in \mathbb{R}$ . En mettant cette forme de fonction dans l'équation différentielle (15), on obtient l'équation suivante :

$$(i\omega - \beta)^2 e^{(i\omega - \beta)t} + 2\gamma(i\omega - \beta)e^{(i\omega - \beta)t} + \omega_0^2 e^{(i\omega - \beta)t} = 0 \quad (17)$$

L'avantage de cette forme est que les dérivées sont devenues des multiplications et – comme l'exponentiel n'est jamais zéro – on peut simplifier obtenant ainsi une simple équation algébrique pour déterminer les valeurs de  $\omega$  et  $\beta$  :

$$-\omega^2 + \beta^2 - 2i\omega\beta + 2\gamma i\omega + 2\gamma\beta + \omega_0^2 = 0 \quad (18)$$

L'équation (18) s'appelle équation caractéristique et elle nous permet de déterminer l'amortissement et la fréquence des oscillations. C'est une équation complexe qui est satisfaite si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont zéro, ce qui nous donne

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (19)$$

$$\beta = \gamma \quad (20)$$

Comme  $\omega \in \mathbb{R}$ , la condition  $\omega_0 > \gamma$  s'impose, c'est la formulation mathématique de ce que l'on a appelée faible amortissement tout à l'heure.

A partir de la forme (16), toutes les solutions peuvent être générées en multipliant avec une amplitude complexe :

$$Ae^{i\phi}e^{-\gamma t}e^{i\omega t} \quad (21)$$

La partie réelle de cette fonction étant  $Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$ , on peut utiliser exactement la même méthode que pour la forme (6) dans la section intitulé Conditions initiales pour trouver la solution qui est ajustée aux conditions initiales.

## Amortissement forte

Si l'amortissement n'est pas faible, donc  $\omega_0 < \gamma$ ,  $\omega$  devient imaginaire. La conséquence pour l'équation (16) est que la partie oscillante devient aussi une relaxation exponentielle !

Pour ne pas se perdre avec tous les facteurs de  $i$ , cherchons la solution sous forme

$$e^{-\kappa t} \quad (22)$$

Remplacement dans l'équation (15) et simplification avec la partie exponentielle donne

$$\kappa^2 - 2\gamma\kappa + \omega_0^2 = 0 \quad (23)$$

qui donne deux constantes de relaxation possibles

$$\kappa_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (24)$$

La solution générale s'écrit

$$x(t) = Ae^{-\kappa_1 t} + Be^{-\kappa_2 t} \quad (25)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  se déterminent à partir des conditions initiales  $x_0$  et  $v_0$  à  $t = 0$  avec les équations suivantes :

$$x_0 = A + B \quad (26)$$

$$v_0 = -A\kappa_1 - B\kappa_2 \quad (27)$$

## Amortissement critique

Quand  $\omega_0 = \gamma$ , (19)-(20) et (24) deviennent dégénérés, nous ne trouvons pas nos deux solutions car la solution est multiple. La recette générale dans un cas pareil est d'introduire aussi la solution  $te^{-\kappa t}$ . Si la multiplicité de la racine est plus grande, on introduit les puissances de  $t$  plus élevées. Dans notre cas, cela donne la solution suivante :

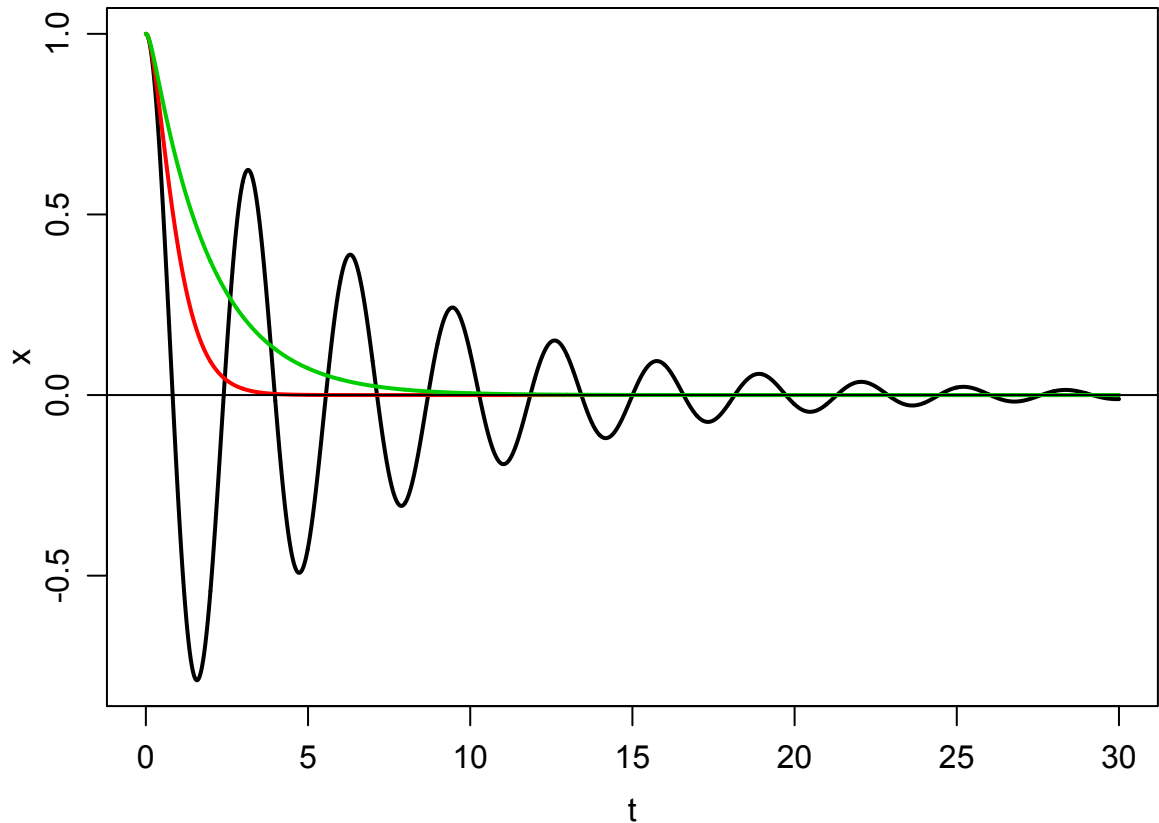
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\kappa t} \quad (28)$$

avec  $\kappa = \gamma$ . De nouveau, nous devons ajuster les paramètres  $A$  et  $B$  aux conditions initiales  $x_0$  et  $v_0$  à  $t = 0$  :

$$x_0 = A \quad (29)$$

$$v_0 = B - \gamma A \quad (30)$$

Le dessin montre les trois types de solution pour l'oscillateur amorti. La courbe noire correspond à l'amortissement faible, la courbe verte à l'amortissement forte, la courbe rouge à l'amortissement critique.



## Oscillateur amorti forcé

Dans ce qui précède, nous avons étudié le comportement de l'oscillateur amorti libre. Techniquement, cela signifie que l'équation différentielle était homogène, c.à.d. ne comportait pas de terme constant. La question suivante est son comportement sous force externe.

Pour résoudre ce problème dans sa généralité, il faut noter qu'il suffit de trouver une seule solution particulière à l'équation non-homogène, et la solution générale peut être obtenue en y ajoutant la solution de l'équation homogène  $Ae^{i\phi}e^{-\gamma t}e^{i\omega t}$ . La preuve, c'est que si  $f$  et  $g$  sont les solutions de l'équation non-homogène, leur différence est la solution de l'équation homogène.

Nous allons étudier uniquement la réponse à une force externe harmonique de forme  $f(t) = e^{i\omega t}$ , de module unitaire, car le théorème de Fourier nous assure que toute fonction de l'intérêt pratique peut être exprimée comme la combinaison linéaire des oscillations harmoniques, et la

linéarité de notre équation différentielle nous assure que la réponse dans ce cas peut être écrite comme la combinaison linéaire des solutions à des sollicitations amorties.

Donc, notre but est de trouver un  $x(t)$  qui satisfait l'équation différentielle suivante :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + e^{i\omega t} \quad (31)$$

Nous pouvons introduire les mêmes constantes que dans l'équation (15) :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t} \quad (32)$$

Nous cherchons la solution sous forme

$$Ae^{i\omega' t} \quad (33)$$

Remplacement de cette forme dans (32) donne

$$-\omega'^2 Ae^{i\omega' t} + 2i\gamma\omega' Ae^{i\omega' t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega' t} = e^{i\omega t} \quad (34)$$

La première chose que l'on constate est que  $\omega' = \omega$ , sinon les deux côtés de l'équation auront un développement temporel différent. Donc la réponse a la même fréquence que la sollicitation. C'est une propriété générale des systèmes linéaires.

Si la fréquence est la même, on peut simplifier avec l'exponentielle et obtenir l'amplitude complexe :

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (35)$$

L'amplitude est complexe, il y a donc déphasage entre l'excitation et la réponse. Cette fonction contient beaucoup d'informations, mais il faut les sortir. Pour simplifier la notation, mesurons la fréquence en unités de  $\omega_0$ , donc utilisons  $z = \omega/\omega_0$  et introduisons le facteur  $Q = \omega_0/2\gamma$ .

Étudions d'abord sa valeur absolue :

$$|A| = \sqrt{\frac{1}{(1 - z^2)^2 + z^2/Q^2}} \quad (36)$$

On constate que l'amplitude des oscillations à la fréquence  $\omega_0$  est égale à  $Q$ . Nous laissons au lecteur de vérifier que le maximum de la fonction se trouve à la valeur donnée par (19), la fréquence naturelle de l'oscillateur amorti.

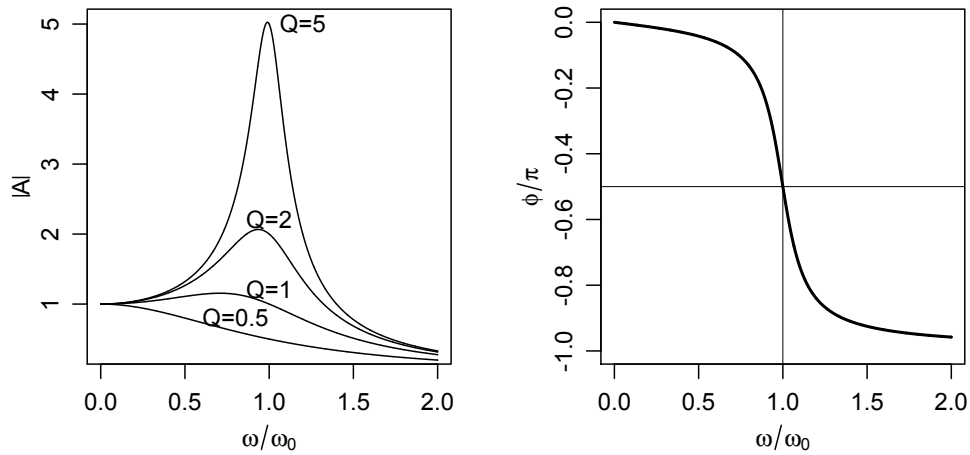
La phase est donnée par

$$\phi = \arctan \frac{-z}{Q(1 - z^2)} \quad (37)$$

Quand  $\omega = \omega_0$ , donc  $z = 1$ , la phase est  $-\pi/2$ , l'amplitude est purement imaginaire et la vitesse est en phase avec la sollicitation. Nous allons voir l'implication de ce fait dans les considérations énergétiques.

Quand la fréquence est très faible, l'amplitude tend vers 1 et la phase devient zéro : la particule suit la sollicitation sans retard. A l'autre extrémité, quand la fréquence est très grande par rapport à la fréquence naturelle du système, l'amplitude tend vers zéro, et la phase vers  $-\pi$ . Cela signifie que l'oscillateur n'arrive plus du tout à suivre le mouvement, son inertie l'empêche de se déplacer.

Le dessin suivant montre (36) en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de  $Q$ , et la phase (37) for  $Q = 5$ . On voit l'illustration de différents propos qui précèdent.



La solution que nous avons obtenue ne contient aucun paramètre ajustable. Pour avoir une solution qui est ajustée aussi à des conditions initiales, il faut ajouter la solution générale du problème homogène de forme (21), et ajuster les paramètres à des conditions initiales.

## Résonance

La résonance est le nom du phénomène qui se produit quand la fréquence de sollicitation incite des très grandes amplitudes de l'oscillation forcée.

Ce phénomène est exploité dans beaucoup de systèmes. Par exemple, les circuits résonants dans les récepteurs radio permettent de détecter des signaux très faibles. La résonance mécanique explique comment on peut atteindre des grandes amplitudes d'oscillation en donnant de petites secousses à une balançoire.

La résonance peut aussi être détrimentale : si par malchance un système mécanique n'a pas assez d'amortissement et qu'il est excité à sa fréquence de résonance, les amplitudes suffisamment grandes peuvent être atteintes pour provoquer la rupture.

## Energie

Nous allons étudier la variation de l'énergie de l'oscillateur faiblement amorti et la dissipation de l'énergie dans l'oscillateur forcé.

L'énergie totale est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, nous avons donc besoin de la position et de la vitesse de l'oscillateur faiblement amorti. Pour ça, nous utilisons la solution de forme

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (38)$$

qui donne la vitesse

$$v(t) = A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) - A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (39)$$

Si l'amortissement est faible ( $\omega \gg \gamma$ ), en moyenne le second terme peut être négligé devant le premier, et un calcul tout à fait identique au (11) nous donne

$$E(t) = e^{-2\gamma t} \frac{1}{2} k A^2 = e^{-2\gamma t} E_0 \quad (40)$$

L'énergie est donc dissipée exponentiellement.

## Facteur de qualité

Pour caractériser la vitesse avec laquelle l'énergie est dissipée, il est utile d'introduire le concept du facteur de qualité. Le facteur de qualité est défini comme le rapport entre énergie emmagasinée dans l'oscillateur, et l'énergie dissipée  $\Delta E$  pendant une période, multiplié par  $2\pi$  :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (41)$$

Le facteur de qualité exprime la capacité de l'oscillateur de stocker de l'énergie. Pour trouver la relation entre les paramètres de l'oscillateur et  $Q$ , calculons l'énergie dissipée pendant une période :

$$\Delta E \approx T \left| \frac{dE}{dt} \right| = T 2\gamma E(t) \quad (42)$$

qui donne pour le facteur de qualité

$$Q = \frac{2\pi}{T} \frac{E(t)}{2\gamma E(t)} = \frac{\omega}{2\gamma} \quad (43)$$

Si l'amortissement est faible, alors  $\omega \approx \omega_0$ , donc le facteur de qualité défini ici est le même que le facteur  $Q$  défini dans l'équation (36).

## Puissance dissipée dans l'oscillateur forcé

Pour calculer la puissance dissipée dans l'oscillateur forcé, nous utilisons le fait que la solution particulière de forme (33) est stationnaire, donc la puissance dissipée par l'oscillateur est égale à la puissance livrée par la force externe, et nous pouvons calculer sa moyenne ainsi :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F v dt \quad (44)$$

Dans la notation complexe le calcul est particulièrement simple car le produit scalaire de deux chiffres complexes est  $ab^*$ , la puissance moyenne se calcule donc comme

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}(e^{i\omega t} A(\omega)^* e^{-i\omega t}) dt \quad (45)$$

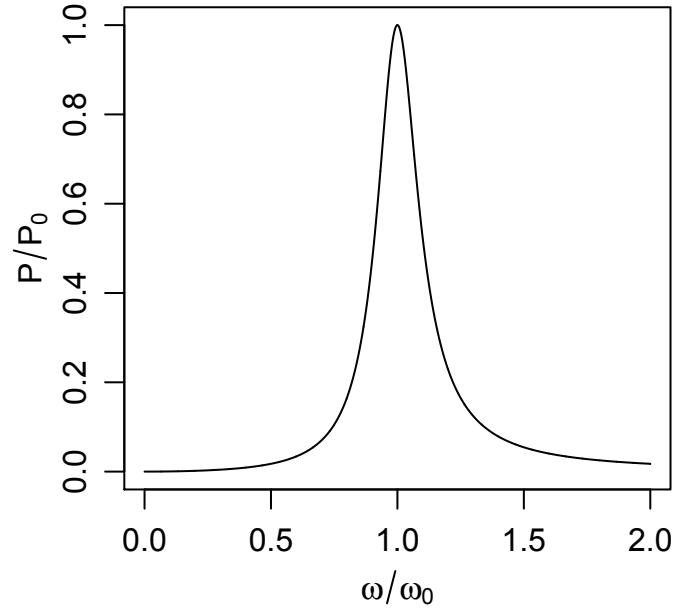
La composante réelle de la force est  $\cos \omega t$ , la composante réelle de la vitesse est  $-\text{Im}(A(\omega))\omega \cos \omega t$ , où  $A(\omega)$  est donnée par (46).

$$\langle P(\omega) \rangle = \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (46)$$

Définissons  $P_0 = \langle P(\omega_0) \rangle = \frac{1}{4\gamma}$ , avec lequel la puissance moyenne dissipée s'écrit comme

$$\langle P(\omega) \rangle = P_0 \frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)^2 + 1} \quad (47)$$

La puissance transmise sera donc maximale si  $\omega = \omega_0$ . La figure suivante montre la courbe de résonance.



La puissance absorbée atteint la moitié du maximum quand  $\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} = 1$ , qui nous donne  $(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = 2\gamma\omega$ . Si l'amortissement est faible, la courbe est très étroite, on peut donc approximer  $\omega$  par  $\omega_0$ , ce qui nous donne la relation  $2\Delta\omega\omega_0 = 2\gamma\omega_0$ , donc  $2\Delta\omega = 2\gamma$ . Autrement dit, la largeur de la courbe d'absorption à la mi-hauteur est égale à la dissipation.