

Chapitre XVIII

Rappels d'électrodynamique classique

A	Electrodynamique classique	387
A-1	Equations et relations fondamentales	387
A-2	Description des phénomènes dans l'espace réciproque . .	388
A-3	Elimination des champs longitudinaux dans l'expression des grandeurs physiques	393
B	Description du champ transverse comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques	396
B-1	Brefs rappels sur l'oscillateur harmonique à une dimension	396
B-2	Variables normales du champ transverse	397
B-3	Modes discrets dans une boîte	402
B-4	Généralisation de la notion de mode	403

Introduction

Dans les trois chapitres précédents, nous avons étudié les ensembles de particules identiques; nous avons montré comment apparaît dans ce cadre la notion d'opérateur de champ quantique. Nous abordons maintenant une nouvelle série de trois chapitres où cette notion de champ quantique est appliquée à un cas particulier important : le champ électromagnétique, composé de bosons identiques appelés "photons". Nous partirons de la constatation qu'en électromagnétisme classique la dynamique des différents modes du champ est exactement semblable à celle d'une série d'oscillateurs harmoniques. Chacun de ces modes peut donc être quantifié par la même méthode que pour un oscillateur harmonique élémentaire constitué d'une seule particule; cette approche possède le grand avantage de la simplicité. Elle demande toutefois d'établir au préalable cette équivalence entre modes du champ électromagnétique classique et oscillateurs harmoniques; c'est le but principal du présent chapitre.

Cet objectif nous amènera à effectuer un certain nombre de rappels d'électromagnétisme classique, afin d'assurer la cohérence de l'exposé. Nous consacrons également un complément à une présentation synthétique du formalisme lagrangien appliqué à ce cas. Toutefois, le lecteur qui serait déjà familier avec ces aspects de l'électromagnétisme classique pourra passer directement au traitement quantique du Chapitre XIX.

Nous commençons au § A par rappeler les équations de Maxwell-Lorentz décrivant l'évolution couplée des champs électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ et des coordonnées et vitesses des particules servant de source pour ce champ¹. Nous rappelons l'expression d'un certain nombre de constantes du mouvement, comme l'énergie, l'impulsion et le moment cinétique du système global "champ + particules". Les potentiels vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et scalaire $U(\mathbf{r}, t)$ sont également introduits, ainsi que les transformations de jauge pouvant être effectuées sur ces potentiels.

Nous montrons ensuite qu'il est intéressant d'effectuer une transformation de Fourier spatiale sur les champs. Dans l'espace réciproque, les équations de Maxwell prennent en effet une forme plus simple. En l'absence de particules, ce ne sont plus des équations aux dérivées partielles, mais des équations différentielles en temps. De plus, la notion de champ de vecteurs longitudinal ou transverse prend une signification géométrique claire dans l'espace réciproque². Un champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t)$ est longitudinal si $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t)$ est parallèle à $\mathbf{k}$ en tout point $\mathbf{k}$ de l'espace réciproque, transverse si $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t)$ est perpendiculaire à $\mathbf{k}$ en tout point $\mathbf{k}$. Nous montrons que deux des quatre équations de Maxwell fixent la valeur des champs électrique et magnétique longitudinaux alors que les deux autres décrivent l'évolution des champs transverses. Il apparaît notamment que le champ électrique longitudinal est tout simplement le champ électrostatique de Coulomb créé par les particules chargées. Ce n'est donc pas une variable de champ indépendante puisqu'il est fonction des seules coordonnées des particules³. Le choix de la jauge de Coulomb revient par ailleurs à prendre le potentiel vecteur longitudinal égal à zéro, ce qui permet finalement d'éliminer les champs longitudinaux des expressions de toutes les grandeurs physiques.

Dans le § B, nous montrons l'équivalence qui existe entre le champ de rayonnement et un ensemble d'oscillateurs harmoniques à une dimension. Les équations de Maxwell des champs transverses permettent en effet d'introduire des combinaisons linéaires des potentiels vecteurs et champs électriques transverses qui, en l'absence de particules et pour chaque vecteur d'onde $\mathbf{k}$, évoluent en $e^{-i\omega t}$ où $\omega = ck$. Ces variables, appelées *variables normales*, décrivent donc les modes propres de vibration du champ libre. La dynamique de chacun de ces modes propres est analogue à celle d'un oscillateur harmonique à une dimension, la variable normale du mode apparaissant comme l'équivalent de la combinaison linéaire de la position et de la vitesse de l'oscillateur associé qui devient, lors de la quantification, l'opérateur d'annihilation bien connu dans la théorie quantique de l'oscillateur harmonique. C'est le remplacement des variables normales et de leurs complexes conjuguées par des opérateurs d'annihilation et de création qui permettra, dans le Chapitre XIX, d'obtenir l'expression des divers opérateurs de la théorie quantique.

1. Nous supposons ici que les vitesses des particules sont faibles devant la vitesse de la lumière, de sorte que nous pourrions nous limiter à une description non relativiste.

2. Nous désignons par $\tilde{G}(\mathbf{k})$ la transformée de Fourier spatiale de $G(\mathbf{r})$, le symbole "tilde" permettant de distinguer clairement les deux fonctions dans l'espace ordinaire et l'espace réciproque.

3. Le champ magnétique longitudinal est quant à lui nul.

A. Electrodynamique classique

A-1. Equations et relations fondamentales

A-1-a. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell dans le vide et en présence de sources sont au nombre de quatre :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-1a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{A-1b})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-1c})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-1d})$$

Elles donnent la divergence et le rotationnel des champs électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Les densités de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ et de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ qui apparaissent dans ces équations s'expriment, à la limite non relativiste, en fonction des positions $\mathbf{r}_a(t)$ et des vitesses $\mathbf{v}_a(t) = d\mathbf{r}_a(t)/dt$ des diverses particules a du système, de masses m_a et de charges q_a :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a q_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)] \quad (\text{A-2a})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a q_a \mathbf{v}_a(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)] \quad (\text{A-2b})$$

A-1-b. Equations de Lorentz

Les équations de Lorentz décrivent la dynamique de chaque particule a sous l'effet des forces électrique et magnétique exercées sur cette particule par les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$:

$$m_a \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_a(t) = q_a [\mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t) + \mathbf{v}_a(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a(t), t)] \quad (\text{A-3})$$

Les évolutions des particules et des champs sont couplées : les particules évoluent sous l'effet des forces exercées sur elles par les champs, et jouent elles-mêmes le rôle de sources pour l'évolution des champs.

A-1-c. Constantes du mouvement

Les définitions (A-2a) de $\rho(\mathbf{r}, t)$ et (A-2b) de $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ entraînent l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{A-4})$$

qui implique l'invariance au cours du temps de la charge totale du système de particules :

$$Q = \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a q_a \quad (\text{A-5})$$

D'autres constantes du mouvement existent : l'énergie totale H , l'impulsion totale $\mathbf{P}$ et le moment cinétique total $\mathbf{J}$ du système champ + particules, donnés respectivement par :

$$H = \sum_a \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2(t) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] \quad (\text{A-6a})$$

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a(t) + \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-6b})$$

$$\mathbf{J} = \sum_a \mathbf{r}_a(t) \times m_a \mathbf{v}_a(t) + \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (\text{A-6c})$$

On peut en effet vérifier, à partir des équations (A-1) et (A-3), que les dérivées par rapport au temps de H , $\mathbf{P}$ et $\mathbf{J}$ sont nulles (pour H et $\mathbf{P}$, voir par exemple exercice 1 et son corrigé dans le Complément C_I de [15]).

A-1-d. Potentiels scalaire et vecteur ; transformations de jauge

Comme nous l'avons déjà vu dans le Complément H_{III}, les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ peuvent toujours être écrits sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-7a})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-7b})$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $U(\mathbf{r}, t)$ sont les potentiels vecteur et scalaire constituant une *jauge*. Lorsque $\chi(\mathbf{r}, t)$ est une fonction arbitraire de $\mathbf{r}$ et de t , toute transformation de ces potentiels définie par les relations :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-8a})$$

$$U(\mathbf{r}, t) \Rightarrow U'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-8b})$$

conduit à la même expression de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$; les mêmes champs physiques peuvent donc être représentés par plusieurs potentiels $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $U(\mathbf{r}, t)$ différents. La transformation (A-8) associée à la fonction $\chi(\mathbf{r}, t)$ est appelée *transformation de jauge*.

Les relations (A-8) laissent une flexibilité sur le choix de la jauge $\{\mathbf{A}, U\}$, ce qui permet d'introduire une condition supplémentaire. La jauge de Coulomb, que nous utiliserons dans ce chapitre et les suivants, est définie par la condition :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{A-9})$$

Nous donnerons plus loin une interprétation géométrique de la condition (A-9) dans l'espace réciproque.

A-2. Description des phénomènes dans l'espace réciproque

L'utilisation de la transformation de Fourier permet de mettre les équations de l'électrodynamique sous une forme qui est très commode pour la suite des calculs.

A-2-a. Transformation de Fourier spatiale

Introduisons la transformée de Fourier du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{A-10})$$

permettant d'exprimer $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{A-11})$$

Des expressions analogues peuvent être écrites pour toutes les grandeurs physiques introduites plus haut : champ magnétique, densités de courant et de charge, potentiels vecteur et scalaire.

Il sera utile pour la suite de rappeler l'identité de Parseval-Plancherel (Appendice I, § 2-c) exprimant l'égalité du produit scalaire de deux fonctions prises dans l'espace des positions ou dans l'espace réciproque⁴ :

$$\int d^3r F^*(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}) = \int d^3k \tilde{F}^*(\mathbf{k}) \tilde{G}(\mathbf{k}) \quad (\text{A-12})$$

et le fait que, dans l'espace réciproque, le produit de deux fonctions est la transformée de Fourier du produit de convolution de ces deux fonctions dans l'espace des positions :

$$\tilde{F}(\mathbf{k}) \tilde{G}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{TF}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r' F(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{A-13})$$

A-2-b. Equations de Maxwell dans l'espace réciproque

Les équations de Maxwell prennent une forme plus simple dans l'espace réciproque et permettent d'identifier clairement les différences de nature entre les composantes longitudinale et transverse des divers champs. Tout champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t)$ peut être décomposé en un champ longitudinal $\tilde{\mathbf{V}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t)$, parallèle en tout point $\mathbf{k}$ au vecteur $\mathbf{k}$, et un champ transverse $\tilde{\mathbf{V}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ perpendiculaire à $\mathbf{k}$:

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{V}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) + \tilde{\mathbf{V}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-14})$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) = \boldsymbol{\kappa} \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t) \right) = \mathbf{k} \left(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t) \right) / k^2 \quad (\text{A-15a})$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t) - \tilde{\mathbf{V}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-15b})$$

où $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ est le vecteur unitaire le long de $\mathbf{k}$.

Comme l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ dans l'espace des positions correspond à l'opérateur $i\mathbf{k}$ dans l'espace réciproque, les équations de Maxwell (A-1) deviennent dans l'espace

4. Nous appelons "espace des positions" celui des vecteurs $\mathbf{r}$ (espace ordinaire), et "espace réciproque" celui des vecteurs d'onde $\mathbf{k}$.

réciroque :

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-16a})$$

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (\text{A-16b})$$

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-16c})$$

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-16d})$$

Compte tenu des définitions (A-15) des composantes longitudinales et transverses d'un champ de vecteurs, les deux premières équations (A-16a) et (A-16b) fixent les parties longitudinales projections des champs $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)$ sur $\mathbf{k}$:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{\varepsilon_0} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \frac{\mathbf{k}}{k^2} \quad (\text{A-17a})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (\text{A-17b})$$

Les deux dernières équations (A-16c) et (A-16d) donnent les vitesses de variation $\partial \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t)/\partial t$ et $\partial \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)/\partial t$ des champs $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)$. Ce sont donc les équations du mouvement de ces champs. En l'absence de sources ($\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{0}$), c'est-à-dire pour un champ que nous appellerons “libre”, ce sont des équations différentielles en temps, et non plus aux dérivées partielles comme c'est le cas dans l'espace des positions.

A-2-c. Champs électrique et magnétique longitudinaux

L'équation (A-17b) montre que le champ magnétique longitudinal $\tilde{\mathbf{B}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t)$ est nul. L'équation (A-17a) donne $\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t)$ sous la forme d'un produit de deux fonctions de $\mathbf{k}$, $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)$ et $-i\mathbf{k}/\varepsilon_0 k^2$ dont les transformées de Fourier s'écrivent :

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \xleftrightarrow{\text{TF}} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-18a})$$

$$-\frac{i}{\varepsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \xleftrightarrow{\text{TF}} \frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A-18b})$$

L'utilisation de l'équation (A-13) conduit alors à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}', t) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_a q_a \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|^3} \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

Ainsi, le champ électrique longitudinal à l'instant t coïncide avec le champ de Coulomb produit par la distribution de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$, calculé comme si cette distribution était statique et figée à cet instant t .

Remarque

Le fait que le champ électrique longitudinal suive instantanément l'évolution de la distribution de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ ne doit pas faire croire à des interactions à distance se propageant à une vitesse infinie. Il faut aussi tenir compte de la contribution du

champ transverse, car seul le champ électrique total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ possède un sens physique. On peut montrer que le champ électrique transverse a, lui aussi, une composante instantanée qui compense exactement celle du champ longitudinal, de sorte que le champ total est toujours retardé (en $t - r/c$), les interactions électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière c (voir exercice 3 et son corrigé dans le Complément C_I de la référence [15]).

Les résultats précédents montrent que les champs longitudinaux ne sont pas des grandeurs indépendantes : ils sont, soit nuls (cas du champ magnétique longitudinal), soit reliés simplement aux coordonnées $\mathbf{r}_a(t)$ des particules (cas du champ électrique longitudinal dont l'expression est donnée par (A-19)).

A-2-d. Equations d'évolution des champs transverses

Après avoir montré que les deux premières équations de Maxwell fixent la partie longitudinale des champs, considérons maintenant les deux dernières équations (A-16c) et (A-16d) et prenons les composantes transverses des deux membres de chacune d'elles. Comme $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\perp}$, elles se ré-écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = -i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-20a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = ic^2 \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-20b})$$

qui fournissent l'évolution temporelle des champs transverses $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)$.

Remarque

On peut également étudier la projection longitudinale des deux équations de Maxwell (A-16c) et (A-16d). Pour la première c'est très simple, puisque les deux membres de (A-16c) sont transverses ; leur projection longitudinale est donc nulle. Quant à (A-16d), elle conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{j}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (\text{A-21})$$

Prenons le produit scalaire avec $\mathbf{k}$ des deux membres de cette équation. Compte tenu de (A-17a) et du fait que $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{j}}_{\parallel}$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) + i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (\text{A-22})$$

qui n'est autre que l'équation de continuité (A-4) dans l'espace réciproque, et n'apporte donc rien de nouveau.

A-2-e. Potentiels

Les relations (A-7a) et (A-7b) entre champs et potentiels deviennent, dans l'espace réciproque :

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) = -i\mathbf{k} \tilde{U}(\mathbf{k}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-23a})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-23b})$$

et les égalités (A-8a) et (A-8b) définissant une transformation de jauge :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}'(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) + i\mathbf{k}\tilde{F}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-24a})$$

$$\tilde{U}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \tilde{U}'(\mathbf{k}, t) = \tilde{U}(\mathbf{k}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-24b})$$

où $\tilde{F}(\mathbf{k}, t)$ est la transformée de Fourier de $\chi(\mathbf{r}, t)$.

Comme le dernier terme de (A-24a) est un vecteur longitudinal, il est clair qu'une transformation de jauge ne change pas la partie transverse $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$; cette dernière définit donc un champ physique, invariant de jauge :

$$\tilde{\mathbf{A}}'_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-25})$$

Comme $\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}_{\parallel} = \mathbf{0}$, la projection transverse des relations (A-23a) et (A-23b) conduit aux équations :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-26a})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-26b})$$

Notons que l'équation (A-26b) permet d'exprimer $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ en fonction de $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)$. En prenant le produit vectoriel avec $\mathbf{k}$ des deux membres de cette équation, et en utilisant l'identité :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\text{A-27})$$

et le fait que $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = 0$, on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \frac{i}{k^2} (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)) \quad (\text{A-28})$$

Cette équation ainsi que l'équation (A-26a) permettent de ré-écrire les deux équations d'évolution des champs transverses (A-20a) et (A-20b) sous une forme qui ne fait apparaître que $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = -\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-29a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = c^2 k^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-29b})$$

En l'absence de sources ($\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{0}$), on obtient deux équations d'évolution couplées pour les champs transverses $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$. Elles seront utiles plus loin pour l'introduction des variables normales du champ et la démonstration de l'équivalence du champ transverse avec un ensemble d'oscillateurs harmoniques.

Équation d'évolution du potentiel vecteur transverse

L'équation d'évolution de $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}$ peut être obtenue en remplaçant dans (A-29b) $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}$ par $-\partial\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}/\partial t$. On obtient ainsi :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 k^2 \right] \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-30})$$

qui s'écrit dans l'espace des positions :

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_{\perp}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-31})$$

A-2-f. Jauge de Coulomb

La condition $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$, définissant en (A-9) la jauge de Coulomb, devient dans l'espace réciproque :

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (\text{A-32})$$

Dans la jauge de Coulomb, le potentiel vecteur longitudinal est donc nul ; reste le potentiel vecteur transverse, dont nous avons vu plus haut que c'est un champ physique.

Que peut-on dire du potentiel scalaire U dans la jauge de Coulomb ? Prenons la partie longitudinale des deux membres de l'équation (A-23a). Comme le dernier terme du second membre est transverse en jauge de Coulomb, on obtient $\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) = -i\mathbf{k}\tilde{U}(\mathbf{k}, t)$, ce qui, dans l'espace des positions, se traduit par $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$. Le potentiel scalaire est donc le potentiel dont dérive le champ électrique longitudinal. L'équation (A-19) montre alors que, à une constante près, $U(\mathbf{r}, t)$ est égal à :

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_a q_a \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|} \quad (\text{A-33})$$

c'est-à-dire encore au potentiel coulombien créé par la distribution de charges.

Jauge de Lorentz

Dans ce chapitre et le suivant, nous utiliserons principalement la jauge de Coulomb. Une autre jauge couramment adoptée, notamment dans les formulations manifestement covariantes de l'électrodynamique, est la *jauge de Lorentz* définie par la condition :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{A-34})$$

équation qui s'écrit encore, en notations covariantes :

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \quad (\text{A-35})$$

La condition définissant la jauge de Lorentz garde donc la même forme dans tous les référentiels de Lorentz, ce qui n'est pas le cas pour la jauge de Coulomb (puisque un champ transverse de divergence nulle dans un référentiel n'est plus nécessairement transverse dans un autre référentiel en relativité). La jauge de Coulomb a néanmoins l'avantage de permettre d'identifier, dans un référentiel donné, les variables du champ réellement indépendantes.

A-3. Elimination des champs longitudinaux dans l'expression des grandeurs physiques

Pour la suite de la discussion, il sera utile d'éliminer les champs longitudinaux de l'énergie totale H et de l'impulsion totale données par les équations (A-6a) et (A-6b). Ceci permet de ne faire apparaître dans les grandeurs physiques que les variables réellement indépendantes, coordonnées et vitesses des particules, champs transverses.

A-3-a. Énergie totale

Commençons par éliminer le champ électrique longitudinal du dernier terme de l'expression (A-6a). Utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel (A-12) et le fait que $\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = 0$, on peut ré-écrire ce dernier terme sous la forme :

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] = H_{\text{long}} + H_{\text{trans}} \quad (\text{A-36})$$

où :

$$H_{\text{long}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A-37a})$$

$$H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \left[\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) + c^2 \tilde{\mathbf{B}}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) \right] \quad (\text{A-37b})$$

Dans (A-37a), remplaçons $\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{k}, t)$ par l'expression (A-17a). Il vient, compte tenu de (A-12) et (A-13) :

$$\begin{aligned} H_{\text{long}} &= \frac{1}{2\varepsilon_0} \int d^3k \frac{\tilde{\rho}^*(\mathbf{k}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \\ &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \iint d^3r d^3r' \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \sum_a h_{\text{Coul}}^a + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} = V_{\text{Coul}} \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

L'énergie du champ longitudinal est donc égale à l'énergie d'interaction électrostatique de Coulomb V_{Coul} de la distribution de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$. En plus de l'énergie d'interaction de Coulomb de particules différentes a et b , V_{Coul} contient l'énergie h_{Coul}^a du champ de Coulomb de chaque particule a , qui diverge pour des particules ponctuelles.

L'expression (A-37b) de H_{trans} peut être réécrite en fonction des variables $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = -\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ introduites plus haut pour le champ transverse :

$$H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \left[\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) + \omega^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \right] \quad (\text{A-39})$$

Finalement, l'énergie du système global champ + particules peut être réécrite sous la forme :

$$H = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2(t) + V_{\text{Coul}} + H_{\text{trans}} \quad (\text{A-40})$$

où nous avons utilisé la notation simplifiée $\dot{\mathbf{r}}_a(t) = d\mathbf{r}_a(t)/dt = \mathbf{v}_a(t)$. C'est la somme de l'énergie cinétique des particules, de leur énergie de Coulomb et de l'énergie du champ transverse.

A-3-b. Impulsion totale

Des calculs analogues peuvent être menés pour l'impulsion totale $\mathbf{P}$. La contribution du champ contenue dans le dernier terme de (A-6b) s'écrit :

$$\varepsilon_0 \int d^3k \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}, t) \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = \underbrace{\varepsilon_0 \int d^3k \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}^*(\mathbf{k}, t) \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)}_{\mathbf{P}_{\text{long}}} + \underbrace{\varepsilon_0 \int d^3k \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)}_{\mathbf{P}_{\text{trans}}} \quad (\text{A-41})$$

où nous avons séparé les contributions à $\mathbf{P}$ des composantes longitudinale et transverse du champ électrique⁵. Si l'on utilise (A-17a) et (A-26b), on obtient, compte tenu de l'identité (A-27) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{long}} &= \varepsilon_0 \int d^3k \frac{i\tilde{\rho}^*(\mathbf{k}, t)}{\varepsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \times \left(i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \right) \\ &= \int d^3k \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}, t) \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (\text{A-42})$$

puisque $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = 0$, c'est-à-dire encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{long}} &= \int d^3k \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}, t) \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, t) \\ &= \sum_a q_a \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_a, t). \end{aligned} \quad (\text{A-43})$$

Comme plus haut en (A-39), on peut ré-écrire l'expression de $\mathbf{P}_{\text{trans}}$ en fonction des variables $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = -\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ du champ transverse :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{trans}} &= -\varepsilon_0 \int d^3k \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) \times [i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)] \\ &= -i\varepsilon_0 \int d^3k \mathbf{k} [\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)] \end{aligned} \quad (\text{A-44})$$

L'impulsion du système total champ + particules peut donc être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{P} = \sum_a [m_a \dot{\mathbf{r}}_a(t) + q_a \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_a, t)] + \mathbf{P}_{\text{trans}} \quad (\text{A-45})$$

Introduisons enfin la quantité :

$$\mathbf{p}_a(t) = m_a \dot{\mathbf{r}}_a(t) + q_a \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_a, t) \quad (\text{A-46})$$

Nous verrons plus loin que, dans l'électrodynamique en jauge de Coulomb, $\mathbf{p}_a(t)$ est le moment conjugué de $\mathbf{r}_a(t)$, qui diffère donc de la quantité de mouvement $m_a \dot{\mathbf{r}}_a(t)$.

5. La notation $\mathbf{P}_{\text{long}}$ ne doit pas faire croire que $\mathbf{P}_{\text{long}}$ est lui-même un champ de vecteurs longitudinal : c'est en réalité le vecteur qui donne la contribution du champ électrique longitudinal au vecteur impulsion ; la même remarque s'applique à $\mathbf{P}_{\text{trans}}$.

Exprimées en fonction de $\mathbf{p}_a(t)$, l'énergie totale (A-40) et l'impulsion totale (A-45) s'écrivent :

$$H = \frac{1}{2m_a} \sum_a [\mathbf{p}_a - q_a \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_a, t)]^2 + V_{\text{Coul}} + H_{\text{trans}} \quad (\text{A-47})$$

$$\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a(t) + \mathbf{P}_{\text{trans}} \quad (\text{A-48})$$

où H_{trans} et $\mathbf{P}_{\text{trans}}$ apparaissent dans les équations (A-37b) et (A-41). Nous verrons que H coïncide avec l'hamiltonien en jauge de Coulomb du système total champ + particules.

A-3-c. Moment cinétique total

Des calculs analogues aux précédents, que nous ne détaillerons pas ici⁶, permettent de montrer que la contribution du champ électrique longitudinal au moment cinétique total est égale à :

$$\mathbf{J}_{\text{long}} = \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{r} \times (\mathbf{E}_\parallel \times \mathbf{B}) = \sum_a q_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_a) \quad (\text{A-49})$$

Si l'on regroupe $\mathbf{J}_{\text{long}}$ et le moment cinétique des particules, on obtient, compte tenu de (A-46) :

$$\sum_a \mathbf{r}_a \times m_a \dot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{J}_{\text{long}} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \quad (\text{A-50})$$

de sorte qu'on peut finalement écrire :

$$\mathbf{J} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a + \mathbf{J}_{\text{trans}} \quad (\text{A-51})$$

où :

$$\mathbf{J}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3r [\mathbf{r} \times (\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B})] \quad (\text{A-52})$$

B. Description du champ transverse comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques

B-1. Brefs rappels sur l'oscillateur harmonique à une dimension

L'énergie d'un oscillateur harmonique de fréquence angulaire ω s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (\text{B-1})$$

où $\dot{x}$ la vitesse de l'oscillateur :

$$\frac{d}{dt} x = \dot{x} \quad (\text{B-2})$$

6. Ces calculs peuvent être trouvés dans le § 1 du Complément B_I de [15].

Cette vitesse obéit à :

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = -\omega^2 x \quad (\text{B-3})$$

de sorte que l'équation d'évolution de x est :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{B-4})$$

Il en découle que $x(t)$ évolue comme une combinaison linéaire (réelle) de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$.

L'état dynamique de l'oscillateur harmonique classique est défini à chaque instant par deux variables réelles $x(t)$ et $\dot{x}(t)$. Il est souvent commode de les combiner en une seule variable complexe $\alpha(t)$ en posant :

$$\alpha(t) = C \left[x(t) + i \frac{\dot{x}(t)}{\omega} \right] \quad (\text{B-5})$$

où C est une constante (indépendante du temps) arbitraire. On déduit de (B-2) et (B-3) que $\alpha(t)$ obéit à l'équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{\alpha} = C(\dot{x} - i\omega x) = -i\omega C \left(x + i \frac{\dot{x}}{\omega} \right) = -i\omega \alpha \quad (\text{B-6})$$

La nouvelle variable $\alpha(t)$ varie donc simplement en $e^{-i\omega t}$.

On peut inverser le système formé par l'équation (B-5) et l'équation complexe conjuguée donnant α^* pour calculer x et $\dot{x}$ en fonction de α et α^* . En reportant les expressions ainsi obtenues dans l'équation (B-1) donnant l'énergie E , on obtient après un calcul simple⁷ :

$$E = \frac{m\omega^2}{4C^2} (\alpha^* \alpha + \alpha \alpha^*) \quad (\text{B-7})$$

On peut choisir la constante C de manière que :

$$\frac{m\omega^2}{4C^2} = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (\text{B-8})$$

Alors, après quantification, on obtient l'opérateur hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (\text{B-9})$$

qui est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique⁸.

B-2. Variables normales du champ transverse

B-2-a. Modes propres de vibration du champ transverse libre

Dans l'espace réciproque, l'expression (A-39) de l'énergie H_{trans} du champ transverse libre est une somme de fonctions quadratiques de $\tilde{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}_\perp^*(\mathbf{k}, t)$.

7. En vue de la quantification où α et α^* sont remplacés par des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ qui ne commutent pas, nous conservons l'ordre de α et α^* tel qu'il apparaît dans les calculs.

8. Si $\hat{x}$ et $\hat{p}$ obéissent à la relation de commutation canonique $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, le choix (B-8) pour C entraîne également la relation de commutation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Pour chaque valeur de $\mathbf{k}$, on a donc un hamiltonien d'oscillateur harmonique. Les évolutions des diverses composantes de Fourier spatiales du champ transverse sont donc découplées les unes des autres. L'avantage de passer dans l'espace réciproque apparaît donc clairement : il permet d'identifier quels sont, en l'absence de sources, les modes propres de vibration du champ.

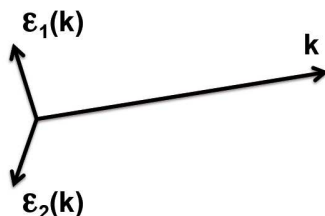


FIGURE 1 – Pour chaque vecteur $\mathbf{k}$, les champs transverse peuvent avoir deux polarisations caractérisées par des vecteurs unitaires $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à $\mathbf{k}$.

En fait, pour chaque $\mathbf{k}$, le champ vectoriel transverse peut avoir deux polarisations⁹ caractérisées par les vecteurs unitaires $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$, perpendiculaires à $\mathbf{k}$ et perpendiculaires entre eux, de sorte que l'on peut écrire, par exemple pour $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \tilde{A}_{\perp\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k}) + \tilde{A}_{\perp\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k}) = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k})} \tilde{A}_{\perp\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k})}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k}) \quad (\text{B-10})$$

avec :

$$\tilde{A}_{\perp\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k})}(\mathbf{k}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B-11})$$

L'ensemble $\{\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k})\}$ définit ce que nous appellerons dans tout ce chapitre un *mode* du champ libre. Les modes $\{\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k})\}$ sont les modes propres de vibration du champ libre, évoluant à la fréquence :

$$\omega = ck \quad (\text{B-12})$$

Pour alléger les notations, nous écrirons la dernière somme de (B-10) sous une forme plus compacte :

$$\sum_{\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k})} \tilde{A}_{\perp\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k})}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{k}) \equiv \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tilde{A}_{\perp\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B-13})$$

9. Nous choisissons ici des vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ réels qui correspondent à des polarisations linéaires ; le choix des deux polarisations de base est d'ailleurs arbitraire dans la mesure où une rotation quelconque autour de $\mathbf{k}$ peut leur être appliquée. On peut également choisir une base de deux vecteurs complexes, cas auquel ils définissent des polarisations circulaires ou elliptiques ; cet autre choix de base est utile pour discuter le spin du champ électromagnétique (Complément Bxix, § 3).

Ré-écrivons l'expression (A-39) de $\tilde{H}_{\text{trans}}$ en faisant apparaître les composantes des champs $\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\dot{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ sur les vecteurs polarisations. Il vient :

$$H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \sum_{\varepsilon} \left[\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t) \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp\varepsilon}(\mathbf{k}, t) + \omega^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t) \tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}(\mathbf{k}, t) \right]. \quad (\text{B-14})$$

Les composantes sur les deux polarisations ε sont des variables dynamiques (coordonnées généralisées et vitesses généralisées) réellement indépendantes. Ce n'est pas le cas des composantes cartésiennes $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp i}(\mathbf{k}, t)$ et $\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp i}(\mathbf{k}, t)$ (avec $i = x, y, z$), à cause de la condition de transversalité. Par exemple, les composantes $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp i}(\mathbf{k}, t)$ doivent obéir à $\sum_i k_i \tilde{\mathbf{A}}_{\perp i} = 0$.

Contraintes des variables dynamiques dans l'espace réciproque

La condition $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}^*(-\mathbf{k}, t)$ découle de la réalité des champs dans l'espace réel. La connaissance des $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}(\mathbf{k}, t)$ dans tout l'espace réciproque entraîne celle des $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t)$. Les variables $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t)$ ne sont donc réellement indépendantes que dans un demi-espace réciproque.

B-2-b. Définition des variables normales, cas du champ libre

Supposons tout d'abord le champ libre ($\tilde{\mathbf{j}}_{\perp} = \mathbf{0}$), et remplaçons dans les équations (A-29a) et (A-29b) le champ $\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ par $-\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$. Compte tenu du fait que $\omega = kc$, on obtient deux équations exactement semblables à celles d'un oscillateur harmonique (B-2) et (B-3), où $\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ remplace $x(t)$. Cette analogie suggère d'introduire, comme en (B-5), une nouvelle variable transverse :

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{k}, t) &= \mathcal{N}(k) \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{\omega} \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \right] \\ &= i\mathcal{N}(k) \left[\frac{\mathbf{k}}{k^2} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{\omega} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

où $\mathcal{N}(k)$ est une constante réelle pour le moment arbitraire qui peut dépendre de k (sa valeur sera choisie au début du chapitre suivant). L'équation d'évolution de $\alpha(\mathbf{k}, t)$ se déduit de sa définition et de (A-29b) et s'écrit :

$$\dot{\alpha}(\mathbf{k}, t) + i\omega\alpha(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (\text{B-16})$$

A la différence de $\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ qui, d'après (A-30), obéit à une équation du second ordre, cette nouvelle variable $\alpha(\mathbf{k}, t)$ obéit à une équation du premier ordre. C'est une variable complexe qui évolue en $e^{-i\omega t}$, et non comme une superposition linéaire de $e^{-i\omega t}$ et $e^{+i\omega t}$ comme c'est le cas de la variable $\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$.

Il sera utile pour la suite de considérer l'équation complexe conjuguée de (B-15) :

$$\begin{aligned} \alpha^*(\mathbf{k}, t) &= \mathcal{N}(k) \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) - \frac{i}{\omega} \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}^*(\mathbf{k}, t) \right] \\ &= \mathcal{N}(k) \left[\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(-\mathbf{k}, t) - \frac{i}{\omega} \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(-\mathbf{k}, t) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne de (B-17), nous avons utilisé la réalité de $\mathbf{A}_\perp$ dans l'espace réel qui entraîne que :

$$\tilde{\mathbf{A}}_\perp^*(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{A}}_\perp(-\mathbf{k}, t) \quad (\text{B-18})$$

ainsi qu'une relation analogue pour $\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_\perp$.

Les variables transverses $\alpha(\mathbf{k}, t)$ et $\alpha^*(\mathbf{k}, t)$ sont appelées *variables normales* du champ transverse. Nous verrons dans le chapitre suivant que, lors de la quantification, elles deviennent des opérateurs d'annihilation et de création de photons.

B-2-c. Equation d'évolution des variables normales en présence de sources

Si $\tilde{\mathbf{j}}_\perp$ n'est pas nul, nous continuerons à définir les variables normales $\alpha(\mathbf{k}, t)$ par les équations (B-15), mais il faut maintenant garder dans l'équation (A-29b) le terme en $\tilde{\mathbf{j}}_\perp(\mathbf{k}, t)$ du second membre. La même transformation que celle qui permet de passer des équations (A-29a) et (A-29b) à (B-16) conduit à une nouvelle équation d'évolution en présence de sources :

$$\dot{\alpha}(\mathbf{k}, t) + i\omega\alpha(\mathbf{k}, t) = \frac{i\mathcal{N}(k)}{\varepsilon_0 \omega} \tilde{\mathbf{j}}_\perp(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B-19})$$

Elle est strictement équivalente aux équations de Maxwell des champs transverses ; il suffit en effet de prendre la dérivée temporelle des équations (B-22a) et (B-22b) données plus loin et d'utiliser (B-19) pour obtenir les équations d'évolution (A-29a) et (A-29b) de ces champs.

Indépendance des variables normales

Un autre intérêt des variables normales est qu'elles sont indépendantes : il n'existe pas de relation entre $\alpha(\mathbf{k}, t)$ et $\alpha^*(-\mathbf{k}, t)$ comme celle qui existe entre $\tilde{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{k}, t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}_\perp^*(-\mathbf{k}, t)$. Les parties réelle et imaginaire de $\alpha(\mathbf{k}, t)$ dépendent en effet de deux degrés de liberté indépendants, $\tilde{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{k}, t)$ et sa dérivée temporelle ; on vérifie d'ailleurs immédiatement en changeant le signe de $\mathbf{k}$ dans (B-15) et en utilisant (B-18) que :

$$\alpha(-\mathbf{k}, t) = \mathcal{N}(k) \left[\tilde{\mathbf{A}}_\perp^*(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{\omega} \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_\perp^*(\mathbf{k}, t) \right] \neq \alpha^*(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B-20})$$

Ainsi la connaissance des $\alpha(\mathbf{k}, t)$ dans tout l'espace réciproque n'entraîne pas celle des $\alpha^*(\mathbf{k}, t)$. Il s'ensuit que les intégrales sur $\mathbf{k}$ des variables normales doivent être prises dans tout l'espace, et non se limiter à un demi-espace réciproque.

B-2-d. Expression des grandeurs physiques en termes des variables normales

Nous montrons maintenant que toutes les grandeurs physiques peuvent être exprimées en fonction des variables normales.

α . Champs transverses dans l'espace réciproque

Ré-écrivons l'équation (B-17) en remplaçant $\mathbf{k}$ par $-\mathbf{k}$:

$$\alpha^*(-\mathbf{k}, t) = \mathcal{N}(k) \left[\tilde{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{k}, t) - \frac{i}{\omega} \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_\perp(\mathbf{k}, t) \right] \quad (\text{B-21})$$

On peut alors utiliser (B-15) et (B-21) pour exprimer $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ en fonction de $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t)$ et $\boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t)$. On obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\mathcal{N}(k)} [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) + \boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t)] \quad (\text{B-22a})$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t) = -i\frac{\omega}{2\mathcal{N}(k)} [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) - \boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t)] \quad (\text{B-22b})$$

β. Énergie et impulsion du champ transverse

Reportons les expressions (B-22a) et (B-22b) de $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ et $\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$ dans celle (A-39) de H_{trans} en utilisant des notations plus compactes :

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha}_{-} = \boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{k}, t) \quad (\text{B-23})$$

Il vient :

$$\begin{aligned} H_{\text{trans}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \frac{\omega^2}{4\mathcal{N}^2(k)} [(\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}_{-}) \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_{-}^*) + (\boldsymbol{\alpha}^* + \boldsymbol{\alpha}_{-}) \cdot (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}_{-}^*)] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3k \frac{\omega^2}{4\mathcal{N}^2(k)} [2\boldsymbol{\alpha}^* \cdot \boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\alpha}_{-} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{-}^*] \end{aligned} \quad (\text{B-24})$$

(dans ces équations, nous respectons l'ordre entre $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\alpha}^*$ tel qu'il apparaît dans les calculs, même si $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\alpha}^*$ sont ici des nombres qui commutent ; la raison en est que des calculs très semblables peuvent être faits en théorie quantique, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\alpha}^*$ étant remplacés par des opérateurs qui ne commutent pas entre eux). Dans l'intégrale des termes en $\boldsymbol{\alpha}_{-} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{-}^*$, effectuons le changement de variables $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ pour faire apparaître l'intégrale de $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^*$. Il vient alors :

$$H_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3k \frac{\omega^2}{4\mathcal{N}^2(k)} [\boldsymbol{\alpha}^* \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^*] \quad (\text{B-25})$$

En faisant apparaître explicitement les composantes de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\alpha}^*$ sur les deux vecteurs polarisation ε perpendiculaires à $\mathbf{k}$, et en utilisant la notation simplifiée (A-26), on obtient finalement :

$$H_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3k \sum_{\varepsilon} \frac{\omega^2}{4\mathcal{N}^2(k)} [\alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t)\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) + \alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t)\alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t)] \quad (\text{B-26})$$

Cette expression ressemble beaucoup à une somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques ; un choix approprié de la constante $\mathcal{N}$ sera fait dans le chapitre suivant.

Des calculs analogues peuvent être menés pour l'impulsion $\mathbf{P}_{\text{trans}}$ du champ transverse¹⁰. L'utilisation des équations (A-44), (B-22a) et (B-22b) conduit à :

$$\mathbf{P}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3k \sum_{\varepsilon} \frac{\omega}{4\mathcal{N}^2(k)} \mathbf{k} [\alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t)\alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) + \alpha_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t)\alpha_{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, t)] \quad (\text{B-27})$$

10. Le développement en variables normales du moment cinétique $\mathbf{J}_{\text{trans}}$ du champ transverse sera calculé dans le Complément B_{XIX}.

γ . *Champs transverses dans l'espace réel*

Considérons tout d'abord le potentiel vecteur transverse $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{k}, t)$, dont l'expression en fonction des variables normales est donnée par (B-22a). Pour obtenir son expression dans l'espace réel il faut, compte tenu de (A-11), multiplier (B-22a) par $(2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ et intégrer sur $\mathbf{k}$. Si, de plus, dans l'intégrale contenant $\alpha_{\epsilon}^*(-\mathbf{k}, t)$, on fait le changement de variables $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, il vient :

$$\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sum_{\epsilon} \frac{1}{2\mathcal{N}(k)} [\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \alpha_{\epsilon}^*(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\epsilon} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \quad (\text{B-28})$$

Des calculs analogues peuvent être menés pour le champ électrique transverse et pour le champ magnétique. Ils conduisent à :

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sum_{\epsilon} \frac{i\omega}{2\mathcal{N}(k)} [\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha_{\epsilon}^*(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\epsilon} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \quad (\text{B-29})$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sum_{\epsilon} \frac{ik}{2\mathcal{N}(k)} [\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha_{\epsilon}^*(\mathbf{k}, t) \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\epsilon} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \\ & (\text{B-30}) \end{aligned}$$

B-3. Modes discrets dans une boîte

Jusqu'ici nous avons considéré que le rayonnement se propage dans l'espace infini, et utilisé des transformées de Fourier continues ; dans la relation (A-11), le champ électrique est décomposé sur une base continue d'ondes planes normées $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/(2\pi)^{3/2}$. Il est toutefois souvent commode d'utiliser une base discrète en supposant que le rayonnement est contenu dans un boîte de volume fini, qu'on définit généralement comme un cube de côté L ; nous le ferons fréquemment avec le rayonnement quantifié dans les deux chapitres qui suivent. Les composantes de chaque vecteur d'onde sont alors soumises aux conditions aux limites dans la boîte¹¹ qui en rendent les valeurs discrètes :

$$k_{x,y,z} = 2\pi n_{x,y,z}/L \quad (\text{B-31})$$

A la fin du calcul, il est d'ailleurs possible de choisir une valeur de L très grande, et de vérifier que le résultat final ne dépend pas de L .

Au lieu de transformées de Fourier spatiales continues, il faut alors introduire des séries de Fourier discrètes où chaque grandeur physique est décomposée sur des ondes planes normalisées $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/L^{3/2}$. La décomposition (A-11) du champ électrique devient alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} d^3k \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B-32})$$

11. On peut choisir des conditions d'annulation du champ sur les parois, mais il est généralement plus commode de prendre les conditions aux limites périodiques (B-31), qui conduisent à la même densité d'états en k .

avec ¹² :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{L^{3/2}} \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B-33})$$

La somme de (B-32) est discrète, et dans (B-33) l'intégrale est maintenant limitée au volume $\mathcal{V}$ de la boîte.

Pour un champ nul hors de la boîte, il est évidemment possible d'utiliser la transformation de Fourier continue (A-10) pour obtenir la composante du champ $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t)$; elle diffère cependant de la composant discrète $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t)$, à cause des coefficients introduits dans les définitions. Les deux composantes sont reliées par l'égalité :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t) = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{3/2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B-34})$$

Les mêmes modifications sont applicables aux transformées de Fourier de toutes les autres grandeurs physiques, le champ magnétique et le potentiel vecteur ainsi que la densité de charge et de courant. Les équations dans l'espace réciproque (A-16), (A-20), (A-24) et suivantes restent valables si l'on remplace les variables continues $\mathbf{k}$ par des variables discrètes, puisqu'il suffit d'en multiplier les deux membres par le facteur $(2\pi)^{3/2} L^{-3/2}$. Pour un champ nul hors de la boîte, les $\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t)$ sont également remplacés par :

$$\alpha_{\mathbf{k}, \epsilon}(t) = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{3/2} \alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B-35})$$

Lorsqu'on revient à l'espace ordinaire $(\mathbf{r}, t)$ par transformée de Fourier inverse, il faut utiliser des relations du type (B-32) au lieu de (A-11). En conséquence, une fois les $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t)$ remplacés par les $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t)$ dans l'intégrale sur d^3k , il faut également introduire un facteur multiplicatif ¹³ :

$$\int d^3k \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{3/2} \sum_{\mathbf{k}} \quad (\text{B-36})$$

B-4. Généralisation de la notion de mode

En l'absence de sources, la solution de l'équation du mouvement (B-16) de la variable normale $\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t)$ est très simple, puisque c'est une exponentielle de fréquence angulaire $\omega = ck$:

$$\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t) = \alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, 0) e^{-i\omega t} \quad (\text{B-37})$$

En reportant (B-37) dans les expressions obtenues plus haut pour les champs transverse et les autres grandeurs physiques, on constate que les champs sont des superpositions linéaires d'ondes planes progressives $\exp \pm(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ évoluant indépendamment les unes des autres. L'énergie et l'impulsion du champ libre sont des

12. Dans le Complément I, nous utilisons une définition légèrement différente des séries de Fourier, où le facteur $1/L^{3/2}$ est absent de (B-32), et où (B-33) contient un facteur $1/L^3$. La définition que nous utilisons est choisie pour faire directement apparaître un développement de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sur des ondes planes normalisées dans le cube.

13. Le produit du facteur multiplicatif de (B-34) par celui de (B-35) redonne bien le facteur $(2\pi/L)^3$ habituel, obtenu directement à partir de (B-31).

sommes de carrés des modules des diverses variables normales, chacun de ces termes étant indépendant du temps et proportionnel à $|\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, 0)|^2$.

Les modes $\{\mathbf{k}, \epsilon\}$ que nous avons introduits dans ce chapitre permettent de développer les champs transverses libres en ondes planes progressives. Cependant, d'autres développements en ondes monochromatiques autres que des ondes planes progressives sont parfaitement possibles ; ils reposent sur l'existence d'autres familles de modes. Pour le voir, revenons à l'équation (A-30). En l'absence de sources, toute solution monochromatique de cette équation, de la forme $\mathbf{A}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, obéit nécessairement à l'équation :

$$(\Delta + k^2)\mathbf{A}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B-38})$$

(qui n'est autre que l'équation de Helmholtz) avec $k = \omega/c$. Cette équation aux valeurs propres admet bien les ondes planes $e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ comme base de fonctions propres. Mais ce n'est pas la seule base possible. D'autres bases existent, comme celle des ondes stationnaires $\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ et $\sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, celle des ondes multipolaires (modes du rayonnement de moment cinétique donné, alors que les ondes planes ont une impulsion donnée), ou encore les modes gaussiens. De façon générale, toute combinaison linéaire d'ondes planes de même module de $\mathbf{k}$ peut constituer un mode. Quelle que soit la base choisie, l'énergie du champ transverse sera une somme de carrés des modules des variables normales apparaissant dans les développements des champs transverses sur les fonctions propres de cette base. Par contre, l'expression d'autres grandeurs physiques ne garde une forme simple que dans certaines bases. Par exemple, l'impulsion du champ transverse n'est une forme somme de carrés de modules que dans la base des ondes planes progressives, alors que le moment cinétique du champ n'a une forme simple que dans la base des ondes multipolaires.

Notons enfin que le champ peut être contenu dans une cavité avec des conditions aux limites bien définies. La recherche des fonctions propres de l'équation (B-38) satisfaisant à ces conditions aux limites permet de déterminer les modes propres de cette cavité.

En conclusion de ce chapitre, on peut dire que le champ de rayonnement libre est équivalent à un ensemble d'oscillateurs harmoniques à une dimension associés aux modes $\{\mathbf{k}, \epsilon\}$ repérés par leur vecteur d'onde et leur polarisation transverse. A chacun de ces modes est associée une variable normale du champ, analogue à la variable classique de l'oscillateur classique correspondant qui devient, lors de la quantification, l'opérateur d'annihilation de l'oscillateur. Les résultats établis dans ce chapitre fourniront donc une base simple pour la quantification du rayonnement qui sera abordée dans le chapitre suivant.